

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN GENERADOR-DE HALL UTILIZADO EN CIRCUITOS INTEGRADOS

Luis Diego Méndez García

Manuel Hernández Calviño

Instituto Central de Investigación Digital. INSAC.

RESUMEN

Este trabajo está dedicado al análisis del comportamiento de un generador de Hall bajo la condición de extracción de corriente por los electrodos de Hall, que es la forma usual de operación cuando forma parte de un circuito integrado.

Partiendo de la Ecuación de Transporte de Boltzmann y de las condiciones de frontera, se obtienen las relaciones entre la corriente y el potencial para cada una de las regiones de un generador de geometría cuadrada. Usando el método de las diferencias finitas se resuelve la Ecuación de

Laplace en el dominio. En el trabajo se describen el método numérico, el criterio de convergencia y se muestra un diagrama de bloques del programa.

Finalmente, los resultados obtenidos para un generador de Hall de dimensiones micrométricas son analizados.

ABSTRACT

This work is devoted to the analysis of the behavior of a Hall generator under the condition of current flow through the Hall contacts, which is the usual operating mode when it forms part of an integrated circuit.

Starting from the Boltzmann transport equation and the boundary conditions, the relations between the current and potential for each of the regions of a rectangular-shape generator are obtained. Using the method of finite differences the Laplace equation is solved in the domain. In this paper the numerical method, the convergence criterium and the block diagram of the program are described.

Finally, the results obtained for a silicon Hall generator with micrometric dimensions are shown.

INTRODUCCIÓN

Las técnicas de fabricación de circuitos integrados bipolares han permitido integrar en un mismo dado a un generador de Hall y a un circuito que es capaz de detectar el voltaje de Hall y amplificarlo. Circuitos de este tipo se utilizan como medidores de intensidad de campo magnético, de-

tectores de proximidad y teclas sin contacto mecánico. En todos estos casos el generador de Hall funciona en un régimen de trabajo en el que se extrae una corriente de valor moderado por los electrodos de Hall, lo que impide aplicar la fórmula clásica que predice el valor del voltaje de Hall a circuito abierto. (1)

$$V_H = \alpha \mu_H B V_{CC} \quad [1]$$

donde: μ_H movilidad de Hall de los portadores

B intensidad del campo magnético aplicado

V_{CC} voltaje de la batería de alimentación

α factor dependiente de la geometría

Existen dos formas de utilizar el generador de Hall, tal como muestra la fig. 1. En (a) la resistencia de carga R_L se conecta entre ambos electrodos, lo que implica que la corriente que sale por un electrodo entra por el otro. En (b) la corriente que sale por cada electrodo es diferente. El objetivo de este trabajo consiste en estudiar numéricamente la dependencia del voltaje de Hall con relación a la corriente que se extrae por los electrodos, con el fin de lograr un modelo circuital simple que pueda ser utilizado durante la etapa de diseño y dentro de programas de simulación eléctrica.

Planteamiento del problema.

Para encontrar V_H como una función de i_H , es necesario encontrar la distribución estacionaria de potenciales en el

generador de Hall. Supongamos que se aplica un campo magnético uniforme de valor B perpendicular al plano de la fig. 1 y que éste es independiente del tiempo. Entonces :

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad [2]$$

$$\text{por lo que: } \vec{E} = -\nabla V \quad [3]$$

Por otro lado, la Ecuación de Transporte de Boltzman en el caso de un campo magnético débil ($\mu_d B \ll 1$) es:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \mu_d \sigma \vec{E} \times \vec{B} \quad [4]$$

donde: σ conductividad eléctrica

μ_d movilidad de arrastre de los portadores

Puesto que el fenómeno que estamos analizando es estacionario en el tiempo, debe cumplirse que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad [5]$$

Tomando $\text{div}(\nabla \cdot)$ en [4] y teniendo en cuenta que \vec{B} es uniforme se llega a que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad [6]$$

lo que combinado con [3] nos da el conocido resultado:

$$\nabla^2 V = 0 \quad [7]$$

Por otra parte si combinamos [3] y [4] se obtiene:

$$\vec{J} = -(\sigma \nabla V + \mu_d \sigma \nabla V \times \vec{B}) \quad [8]$$

Es decir, para encontrar el valor de V en cada punto es necesario resolver la Ecuación de Laplace [7]. La condición de frontera en los bordes del generador que forman los electrodos donde se conecta la batería de alimentación es de primer tipo, porque el potencial es allí conocido. La ecuación [8] al ser integrada permite calcular la corriente que llega a ambos electrodos. Para las otras fronteras y los electrodos de Hall se procede a la inversa. Mediante [8] e imponiendo el valor de \vec{J} , se obtiene el valor de ∇V o sea, es una condición de frontera de segundo tipo.

A continuación se presenta un resumen de las condiciones de frontera utilizadas. En la fig. 2 se identifican las diversas zonas que componen la frontera del dominio.

Zonas 1, 3, 5, 7

$$J_y = 0 \quad E_y = \mu_d B_z E_x \quad [9]$$

Zonas 4

$$V = 0 \quad [10]$$

Zona 8

$$V = V_{CC} \quad [11]$$

La densidad de corriente que llega a ambos electrodos se obtiene por medio de la expresión siguiente:

$$J_x = \frac{-(\tan \theta \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x})}{\rho(1 + \tan^2 \theta)} \quad [12]$$

Zonas 2, 6 (electrodos de Hall)

$$J_y = - \frac{(-\tan \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y})}{\rho(1 + \tan^2 \theta)} \quad [13]$$

donde: $\tan \theta = \mu_d B_z$

Solución numérica.

Las ecuaciones [7] a [12] fueron expresadas en diferencias finitas, Para lograr una convergencia rápida se utilizó el método de Gauss-Seidel con parámetro de aceleración. (2) El parámetro de aceleración no fue optimizado y se escogió igual a 1,9 que según la referencia consultada (3), resulta un valor conveniente para un dominio cuadrado. En el caso analizado se escogió $a=b$ porque es la geometría más apropiada para aplicaciones en circuitos integrados, ya que gene

radores con $a \gg b$ producen un voltaje de Hall pequeño y si $b \gg a$ entonces la disipación de potencia es elevada.

El dominio fue dividido en una red de 29 filas por 29 columnas lo que da un total de 784 puntos, que se consideró adecuado para la precisión requerida. Las dimensiones de los electrodos de Hall son pequeñas en comparación con las del generador y sólo contienen un punto de la red. El criterio de convergencia utilizado consistió en detener el cálculo cuando la máxima diferencia entre dos iteraciones sucesivas fuese menor que $30 \mu V$. El programa para llevar a cabo los cálculos fue realizado utilizando el lenguaje Fortran IV y se corrió en una máquina IRIS 50.

A continuación se muestra un resumen de las expresiones utilizadas para el cálculo del potencial en cada zona en la forma de diferencias finitas. El sentido de recorrido de la red durante el cálculo es para una j dada desde $k=1$ hasta 29. Debe señalarse que las dimensiones reales del generador en este caso son de $290 \mu m \times 290 \mu m$, por lo que la distancia según los ejes coordenados entre dos puntos de la red se corresponde con $10 \mu m$. (Ver fig. 3).

Zonas 1,3

$$V(j,29) = \frac{(1 + \tan \theta)}{4} V(j+1,29) + \frac{(1 - \tan \theta)}{4} V(j-1,29) + \frac{1}{2} V(j,28)$$

donde: zona 1 : $k = 29$; $j = 2, 3, \dots, 14$

zona 3 : $k = 29$; $j = 16, 17, \dots, 28$

Zona 2

$$V^{(y+1)}(15, 29) = \frac{1}{2} \left\{ V^{(y)}(15, 28) + \frac{(1 - \tan \theta)}{2} V^{(y+1)}(14, 29) + \frac{(1 + \tan \theta)}{2} V^{(y)}(16, 29) + i_{H2} (1 + \tan^2 \theta) \frac{\rho}{t} \right\}$$

donde: $i_{H2} > 0$ significa corriente entrando por el electrodo

Zona 4

$$V^{(y+1)}(29, k) = V^{(y)}(29, k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 29$$

Zonas 5, 7

$$V^{(y+1)}(j, 1) = \frac{(1 - \tan \theta)}{4} V^{(y)}(j+1, 1) + \frac{(1 + \tan \theta)}{4} V^{(y+1)}(j-1, 1) + \frac{1}{2} V^{(y)}(j, 2)$$

donde: zona 5 : $k=1$; $j=16, 17, \dots, 28$

zona 7 : $k=1$; $j=2, 3, \dots, 14$

Zona 6

$$V^{(y+1)}(15, 1) = \frac{1}{2} \left\{ V^{(y)}(15, 2) + \frac{(1 - \tan \theta)}{2} V^{(y)}(16, 1) + \frac{(1 + \tan \theta)}{2} V^{(y+1)}(14, 1) + i_{H6} (1 + \tan^2 \theta) \frac{\rho}{t} \right\}$$

donde: $i_{H6} > 0$ significa corriente entrando por el electrodo

Zona 8

$$V^{(y+1)}(1, k) = V^{(y)}(1, k) = V_{CC} \quad k = 1, 2, \dots, 29$$

Zona 9 (puntos interiores)

$$V^{(y+1)}(j, k) = \frac{1}{4} \left\{ V^{(y)}(j+1, k) + V^{(y+1)}(j-1, k) + V^{(y)}(j, k+1) + V^{(y+1)}(j, k-1) \right\}$$

Para obtener la corriente de consumo del generador de Hall se emplea la expresión:

$$I_p = \frac{[27 V_{CC} - \sum_{k=2}^{28} V^{(y+1)}(2, k)]}{(\frac{\rho}{t}) (1 + \tan^2 \theta)}$$

En todas las expresiones anteriores, se tiene que:

y : orden de la iteración

$$\tan \theta = \mu_d B_z$$

$$R_s = \frac{\rho}{t}$$

Además, en cada zona después de calcular $V^{(y+1)}(j, k)$ se hace:

$$V^{(y+1)}(j, k) = V^{(y)}(j, k) + 1.9 [V^{(y+1)}(j, k) - V^{(y)}(j, k)]$$

donde 1.9 es el valor del parámetro de aceleración. El valor del voltaje de Hall se calcula mediante:

$$V_{Hall} = V(15, 1) - V(15, 29)$$

El criterio de convergencia es :

$$ERR < EPSI$$

$$\text{donde: } ERR = \max [V(j,k)^{(y+1)} - V(j,k)^{(y)}]$$

Debe señalarse que el valor de EPSI no constituye una medida del error de la solución respecto al valor real, o sea, la diferencia entre el resultado del programa para un número dado de iteraciones y el verdadero valor del potencial en un punto.

Al final de este artículo se muestra un diagrama en bloques simplificado en la utilización de las expresiones anteriores para la solución del problema.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos mediante el programa confeccionado.

$$V_{CC} = 5V$$

B (Tesla)	μ_d (cm ² /V-s)	$R_s = \rho/t$ (ohm/□)	Θ	i_H (μA)	i_{CC} (mA)	V_{HALL} (mV)
0,08	1500	580	0,01414	0	8,315	47,6
0,08	1500	580	0,01414	10	8,315	31,6
0,16	1500	580	0,02827	0	8,321	95,3
0,16	1500	580	0,02827	20	8,321	63,3
0,08	1500	440	0,01414	0	10,960	47,6
0,08	1500	440	0,01414	20	10,960	23,4

Como puede apreciarse de los resultados anteriores, el valor obtenido para V_{HALL} cuando $i_H = 0$ y $B = 0,08$ T es de 47,6 mV que coincide con el valor obtenido mediante la ecuación [1] cuando se utiliza $\mu_H = 1,18 \mu_d$ y $\alpha = 0,65$ que es el valor adecuado para un generador cuadrado.

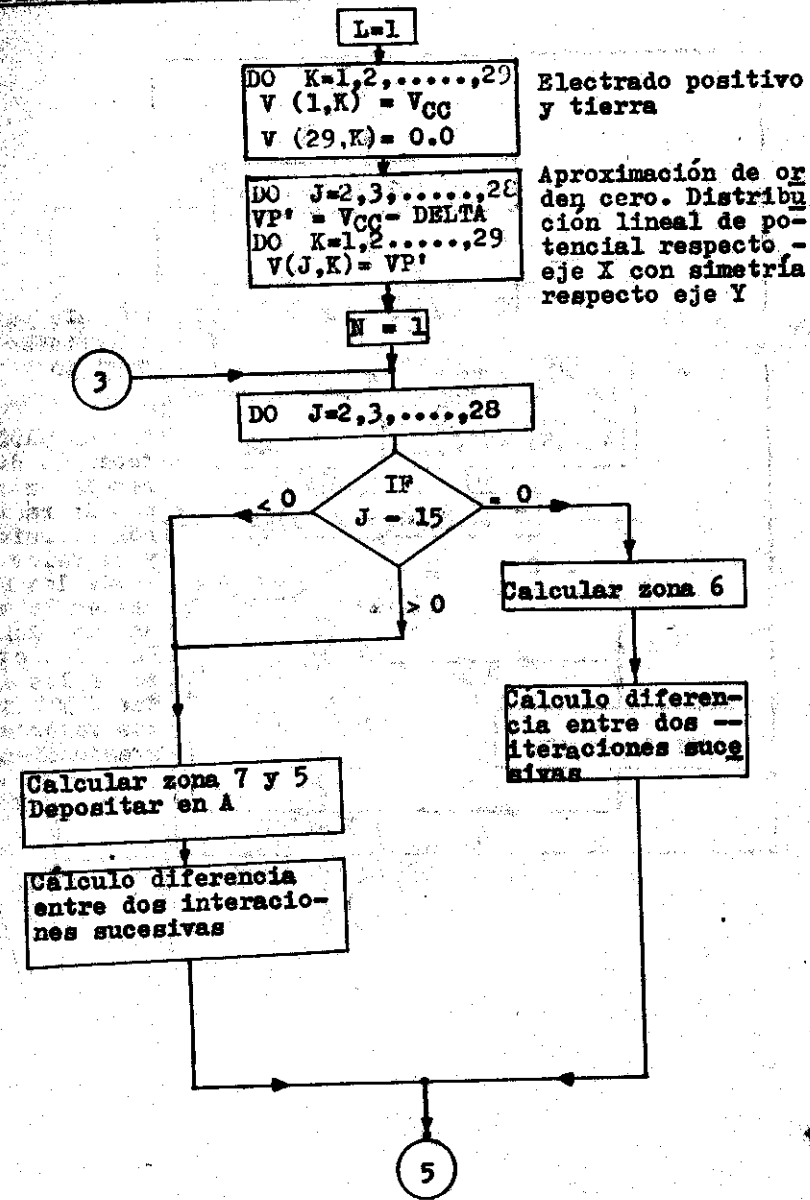
Los valores obtenidos para V_{HALL} cuando $i_H = 10 \mu A$ y $20 \mu A$ con un valor para $R_s = 580 \Omega/\square$ y su comparación con el voltaje obtenido a circuito abierto arrojan que el generador tiene una resistencia interna cuyo valor es $R_i = 1600$ ohm. Por otro lado cuando $R_s = 440 \Omega/\square$ el valor obtenido para $R_i = 1210$ ohm. Puesto que en ambos casos el cociente $\frac{R_i}{R_s} = 2,75$ puede concluirse que para un generador cuadrado y con electrodos de Hall cuyas dimensiones son despreciables frente a las del generador, bajo la condición de campo magnético débil, es válido el circuito de la fig. 4 para representar al generador de Hall siendo V_{HO} el voltaje del generador a circuito abierto.

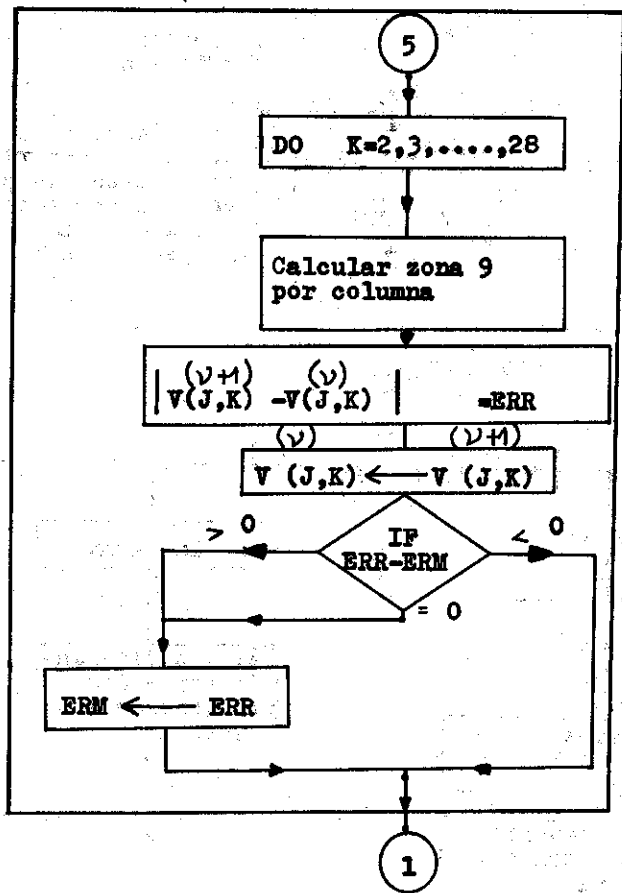
El programa permite calcular la sensibilidad del voltaje de Hall cuando se extrae una corriente de valor moderado por los electrodos de Hall respecto a las variaciones en B , V_{CC} , μ_d y R_s .

BIBLIOGRAFÍA

- (1) A Hall Device in an Integrated Circuit. Solid State Electronics, No. 7, July, Vol. 11, 1968.
- (2) Eugene Isaacson, Herbert Keller. Analysis of Numerical Methods. Editorial Pueblo y Educación, Cuba, 1979.
- (3) Daniel Mc. Kracken. Análisis Numérico y Programación Fortran. Edición Revolucionaria, Edición 1967.

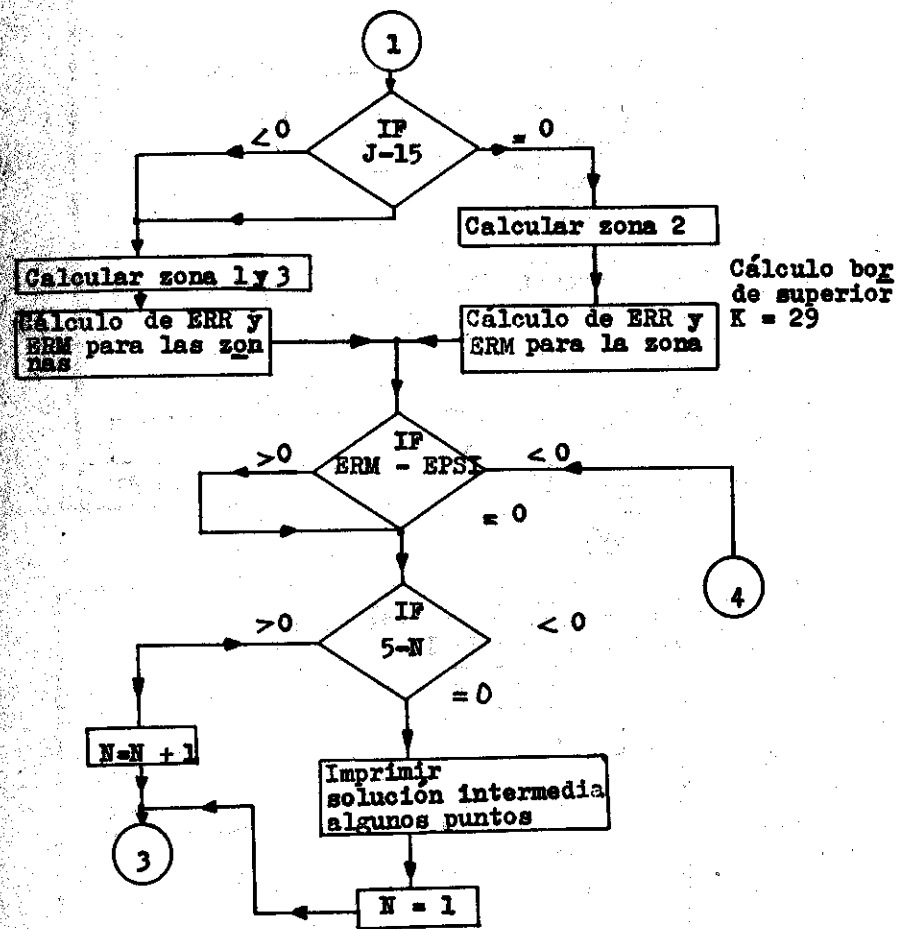
Programa en bloques simplificado del programa.





Cálculo puntos interiores del dominio

Bloque para obtener la diferencia entre dos iteraciones sucesivas y el valor máximo de las mismas en la zona en cuestión. Para las otras zonas los índices J y K toman los valores correspondientes.



Cálculo boy de superior K = 29

