

MEDICIÓN DE FUNCIONES PARA FÓRMULAS DE SENSIBILIDAD Y ERRORES EN EL MÉTODO DE VAN DER PAUW, PARA UNA GEOMETRÍA DADA.

J. Lourido

Fábrica de Dispositivos Semiconductores.

O. Arias

Academia de Ciencias de Cuba.

RESUMEN

En este trabajo, mediante una cubeta de $49,7 \times 49,7 \times 2,5 \text{ cm}^3$ de volumen, en la cual se tiene agua con una resistividad de 1 ka/cm y unas placas de cobre, se simula una muestra semiconductor a la cual se le mide la

resistividad y la movilidad de sus portadores por el método de Van der Pauw. Como las placas de cobre son de tamaño variado, esto nos permite ver cómo influye la geometría de los contactos, en este caso las placas de cobre, en las mediciones. Existen fórmulas desarrolladas en otro trabajo que dan dicha influencia en función de parámetros internos de la muestra y su geometría. Tales fórmulas son generales, sólo quedan algunas funciones por determinar, las cuales dependen únicamente de la geometría de cada muestra en específico. En este trabajo obtenemos y analizamos la forma aproximada de dichas funciones para una geometría en particular; además, se hace un análisis de la aplicabilidad de las fórmulas, en las cuales estas funciones estén incluidas.

ABSTRACT

By means of small tub $49,7 \times 49,7 \times 2,5 \text{ cm}^3$ containing copper plates and water with a resistivity of 1 ka/cm , a semiconductor sample is simulated of which resistivity and mobility of its carriers is measured by the method of Van der Pauw. The copper plates are of varying sizes, thus providing the possibility of observing how the geometry of contacts - in this case the copper plates- influence the measurements. There are formulas, developed

in another paper, that present said influence as a function of internal parameters of the sample and its geometry. These are general formulas and only some functions remain to be determined which depend solely on the geometry of each specific sample. In the present paper the approximate form of such functions is obtained and analysed for a particular geometry. More over, an analysis is made of the applicability of the formulas, in which these functions are included.

INTRODUCCIÓN

Cuando se quiere medir tanto la resistividad como la movilidad de una muestra por métodos de compensación (Efecto Hall o Van der Pauw por corriente directa), necesitamos que la corriente a compensar sea lo suficientemente apreciable como para poder ser detectada. Es por ello que necesitamos conocer fórmulas que nos den esta corriente tanto en la medición de la resistividad ρ como de la movilidad μ para una muestra dada, a la cual se le conozca su geometría. Estas fórmulas harán posible conocer la sensibilidad que es necesaria para medir una muestra en específico.

Nuestro objetivo es determinar por métodos experimentales, unas funciones, que están involucradas en las fór-

mulas que dan la corriente cuando el sistema está descom-
pensado, tanto en las mediciones de la resistividad como
de la movilidad, las cuales dependen única y exclusiva-
mente de la geometría de la muestra.

Independientemente de las fórmulas de sensibilidad,
también se sabe que cuando el tamaño de los contactos no
es puntual (es decir que varían su geometría), al aplicar
el método de Van der Pauw, los valores obtenidos de resis-
tividad y movilidad se apartan de los reales, a medida
que estos contactos dejan de ser puntuales. Las funciones
que pretendemos medir experimentalmente, también nos dan
esta variación.

Todo lo anterior se hace tomando como base el método
de medición de resistividad y movilidad que nos da Van
der Pauw [1] .

FUNDAMENTO TEÓRICO

Comenzaremos haciendo una breve explicación del méto-
do de Van der Pauw al cual nos referimos en la introduc-
ción. Dicho método plantea la posibilidad de medir la re-
sistividad y la movilidad de una muestra bajo las siguien-
tes condiciones:

RESISTIVIDAD

Se considera una muestra plana, con un espesor lo su-
ficientemente pequeño como para considerarlo despreciable
respecto a las dimensiones de la misma. A dicha muestra
se le colocan cuatro contactos puntuales en el borde, a
los cuales llamaremos 1, 2, 3 y 4, según se observa en
la figura 1.

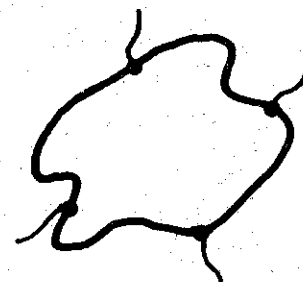


FIG. 1 Muestra semi-conductora
plana con cuatro contactos
colocados en el borde.

Si se introduce una corriente entre los puntos 1 y
2 (I_{12}), podrá medirse entre los puntos 3 y 4, un vol-
taje V_{34} (éste se mide de forma tal que por los puntos
3 y 4 no circule corriente. Con estos parámetros se de-

termina R' , que tiene dimensiones de resistencia, según la expresión $R' = V_{34} / I_{12}$. Si hacemos pasar ahora una corriente entre los puntos 2 y 3, llamémosla I_{23} y medimos el voltaje resultante entre los puntos 1 y 4 (V_{14}), podemos llegar igualmente a definir un parámetro R'' , dado por la expresión $R'' = V_{14} / I_{23}$.

El método de Van der Pauw nos plantea que bajo estas condiciones la resistividad viene dada por la siguiente expresión:

$$\rho_0 = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R' + R''}{2} f(R'/R'') \quad (1)$$

Es fácil ver que si una muestra cumple con determinada simetría $R' = R''$ y la expresión de la resistividad se reducirá a la siguiente,

$$\rho_0 = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{V_{34}}{I_{12}} \quad (1)$$

En este trabajo utilizaremos una muestra cuadrada la cual posee la simetría necesaria para trabajar con la expresión (1).

MOVILIDAD

Bajo las mismas condiciones anteriores, se hace pasar una corriente a través de los contactos 1 y 3 (I_{13}). Medimos el voltaje entre 2 y 4, (V_{24}), también a circuito abierto, bajo la aplicación de un campo magnético y cuando no lo hay, de modo que tendremos dos voltajes $V_{24}(H=0)$ y $V_{24}(H \neq 0)$. Si llamamos V_{24} a la diferencia entre estos dos voltajes, la movilidad estará dada por la siguiente expresión,

$$\mu_0 = \frac{d \Delta V_{24}}{I_{13} \rho_0 H} \quad (2)$$

Tanto en (1) como en (2), hemos llamado d al espesor de la muestra.

Para el caso de una muestra cuadrada, $V_{24}(H=0) = 0$, por consiguiente la expresión (2) se reducirá a la siguiente:

$$\mu_0 = \frac{d V_{24}^0}{I_{13} \rho_0 H} \quad (3)$$

donde V°_{24} es el voltaje cuando hay campo magnético apli-
cado, pero el supracero se le añade para hacer notorio
que se trata de contactos puntuales.

Una vez analizado lo que establece Van der Pauw, vea-
mos el contenido de nuestro trabajo.

Como hemos podido apreciar Van der Pauw trabaja con
contactos puntuales, pero en la práctica no sucede así,
e inclusive desde el punto de vista teórico, esto crea
ciertas dificultades.

Por ejemplo, cuando nosotros tenemos que medir el
voltaje V_{34} conectamos entre las placas (puntos) 3 y 4
un galvanómetro y un potenciómetro, el primero, tiene la
misión de medir la corriente cuando el voltaje V_{34} no
está compensado por el potenciómetro, pero si los contac-
tos no son puntuales, dicha corriente nunca existirá ya
que en este caso, su resistencia se hace infinita y por
ello, en la medida en que los contactos sean más peque-
ños, la sensibilidad del galvanómetro tiene que ser mayor.
Desde este punto de vista sería bueno que los contactos
no fueran pequeños, sin embargo, si no lo son, los valo-
res que obtendremos de la movilidad y la resistividad no
serán los verdaderos, por consiguiente se establece una
especie de compromiso.

En otro trabajo [2] se han obtenido fórmulas que nos
dan la corriente fuera de la compensación en función de
diversos parámetros del material estudiado y de unas fun-
ciones que dependen solamente de la geometría de la mues-
tra. Uno de los objetivos de esta investigación fue cal-
cular esas funciones experimentalmente.

Las fórmulas a que hicimos referencia en el párrafo
anterior son las siguientes:

resistividad

$$r_{(34)}(\theta) = \frac{g'(\theta)}{G'(\theta)} \frac{\ln 2}{\pi} I_{12} \quad (4)$$

Las funciones $g'(\theta)$ y $G'(\theta)$, de la expresión (4), son
las funciones que nosotros vamos a calcular experimen-
talmente.

Habíamos dicho con anterioridad que la muestra que
empleamos era cuadrada, ahora decimos que los contactos
también son cuadrados y que se colocaron en los vértices
del cuadrado, como se aprecia en la figura 2.

Si llamamos N a la longitud de la arista de cada uno
de los contactos y M la longitud de la arista de la mues-
tra, entonces definiremos a $\theta = N/M$, el cual es un paráme-
tro que nos caracteriza totalmente la geometría de la

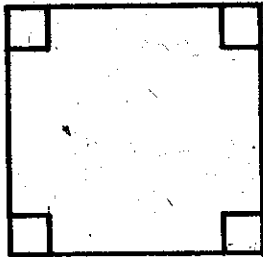


FIG. 2 Esquema de la muestra empleada con los contactos para nuestras mediciones.

muestra, por lo que las funciones anteriores son dependientes única y exclusivamente del mismo.

Es conveniente ahora referirnos a cómo se definieron las funciones $g'(\theta)$ y $G'(\theta)$. Las expresiones que las definen son las siguientes:

$$g'(\theta) = \frac{V_{34}(\theta)}{V_{34}^0} \quad (5)$$

donde hemos llamado $V_{34}(\theta)$ a la diferencia de voltaje entre los puntos 3 y 4 cuando los contactos no son puntuales.

V_{34}^0 es el mismo voltaje pero para contactos puntuales.

$$G'(\theta) = \frac{R'(\theta) d}{\rho_0} \quad (6)$$

donde hemos llamado $R'(\theta)$ a un parámetro que definimos para contactos no puntuales, análogo al que define Van der Pauw.

d es el espesor de la muestra

ρ es la resistividad.

Para medir los errores que se introducen en la medición de la resistividad por el hecho de que los contactos no eran puntuales, se calculó:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{\rho(\theta) - \rho_0}{\rho_0} \quad (7)$$

donde:

$\rho(\theta)$ es la resistividad para contactos no puntuales.

ρ_0 es la resistividad para contactos puntuales.

Es fácil apreciar que la expresión (7) puede expresarse en término de los voltajes por la siguiente fórmula:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{V_{34}(\theta) - V_{34}^0}{V_{34}^0} \quad (8) \quad \text{ó} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} = g'(\theta) - 1 \quad (9)$$

De la expresión (9), observamos que calculando $g'(\theta)$ y $G'(\theta)$ es suficiente para obtener todas las fórmulas relativas a la resistividad.

Para la movilidad la fórmula que nos da la corriente es:

$$I_{24}(\theta) = \frac{g(\theta)}{G(\theta)} \mu H I_{13} \quad (10)$$

donde:

H es el campo magnético aplicado a la muestra.

μ es la movilidad

I_{13} es la corriente que circula entre los puntos 1 y 3.

$g(\theta), G(\theta)$ son las funciones que se van a medir experimentalmente.

En este caso definiremos a $g(\theta)$ de la siguiente manera:

$$g(\theta) = \frac{V_{24}(\theta)}{V_{24}^0} \quad (11)$$

donde:

$V_{24}(\theta)$ es el voltaje entre los puntos 2 y 4 cuando los contactos no son puntuales.

V_{24}^0 es el mismo voltaje pero para contactos puntuales.

Los voltajes anteriormente mencionados son los existentes cuando hay campo magnético aplicado, por lo que esta función no la podremos medir experimentalmente ya que no nos fue posible aplicar este campo a toda la muestra.

Por otra parte la función $G(\theta)$ está dada por la expresión:

$$G(\theta) = \frac{R d}{\rho} \quad (12)$$

donde:

R es la resistencia entre los contactos 2 y 4

d es el espesor de la muestra.

PARTE EXPERIMENTAL

Para nuestra experiencia, se empleó una cubeta de $49,7 \text{ cm}^2$ de área, en la cual colocamos agua, con una profundidad que oscila entre 1.5 y 1.8 cm, a la cual le colocamos cuatro contactos cuadrados de cobre, cuyo tamaño oscilaba entre 3 y 18 cm.

El hecho de tomar agua corriente está dado porque su resistividad es de $10^3 \Omega\text{-cm}$, la cual es del orden de la de los semiconductores, además de que se comprobó que los contactos agua-cobre son totalmente óhmicos.

El circuito empleado en todos los casos se muestra en la figura 3. Sólo se varió el régimen de corriente (directa y alterna) y la posición de las conexiones de los contactos, para medir la movilidad, ya que en este caso la corriente de entrada se aplica entre contactos transversales. En ambos casos las mediciones fueron realizadas con un equipo de alta impedancia de entrada.

Se trabajó con corriente directa de 3.5 ma y alterna de 15 ma. Para ambos casos se efectuaron las mediciones de voltaje teniendo en cuenta el circuito para medir resistividad como para medir la movilidad. Se tomaron un conjunto de valores grande de dichas mediciones, las cuales fueron evidentemente efectuadas para cada juego de

contactos, ya que nuestro objetivo era conocer la forma de las funciones $G(\theta)$, $g'(\theta)$ y $G''(\theta)$.

Una vez obtenidos los datos necesarios para poder conocer el valor de las funciones anteriormente mencionadas, se confeccionó un programa en Lenguaje Leal, el cual nos dio todos los resultados de las funciones incluyendo los errores.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

El valor de la función $g'(\theta)$ decrece con el aumento

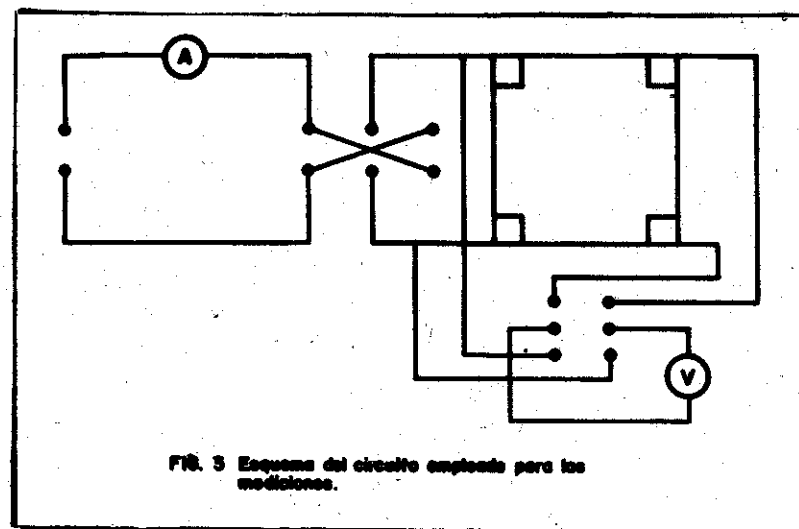


FIG. 3 Esquema del circuito empleado para las mediciones.

de θ . Esto nos dice que el voltaje entre los contactos decrece con el aumento de los mismos, lo cual era de esperar, pues el parámetro R' decrece. Además el gráfico de esta función parte de la unidad para $\theta=0$, lo cual es lógico, pues en este caso los contactos serían puntuales y ambos voltajes coincidirían.

El valor de la función $\frac{1}{G'(\theta)}$ aumenta al aumentar θ . Esto está acorde con el hecho de que el parámetro R' como habíamos mencionado anteriormente, decrece y por consiguiente, según la definición de $G'(\theta)$, ésta debe decrecer también. Además, esta gráfica parte de cero, por lo tanto cuando nos acercamos a la puntualidad, $G'(\theta)$ tiende al infinito al igual que R' .

La función $\infty'(\theta)$, aumenta con el aumento de la relación entre los contactos, lo cual es evidente dada su definición.

El valor de la función $G(\theta)$ disminuye al aumentar θ . Esto, análogamente al caso de $G'(\theta)$, era de esperar, pues $G(\theta)$ es proporcional a la resistencia R , la cual decrece al aumentar θ , por consiguiente $G(\theta)$ tiende a infinito cuando θ tiende a cero. Nuestra gráfica es una comprobación de ello, pues $\frac{1}{G(\theta)}$ parte del origen.

Es importante destacar que hay una separación apreciable entre los puntos pertenecientes a las mediciones con corriente directa y alterna, lo cual teóricamente no debía suceder, pues las funciones que hemos obtenido sólo dependen de la geometría de los contactos. Con ulteriores mediciones trataremos de dar explicación a este fenómeno.

Otra cuestión que se observa es un cambio de concavidad de la curva, que no es ilógico, pero se demuestra que para contactos pequeños la concavidad es hacia abajo, existiendo un punto de inflexión no localizado matemáticamente.

Para demostrarlo, acotaremos la resistencia del cuadrado que representa el contacto, entre las resistencias de los cuartos de círculos que se muestran en la figura 4.

Ahora bien, demostraremos que el comportamiento de las resistencias de ambos cuartos de círculo, con respecto a sus dimensiones, es tal que posee tangente infinita en el origen, y concavidad por supuesto, hacia abajo.

La resistencia que queremos calcular es tal que $R_{bc} < R < R_{ac}$, (fig. 4), pero según la Ley de Poillet

$$R = \rho \frac{l}{A}, \text{ por lo tanto}$$

$$R_{ac} = \int_a^c \rho \left(\frac{2\pi r}{4} \right)^{-1} dr = \frac{2\rho}{\pi d} \int_a^c \frac{dr}{r} = \frac{2\rho}{\pi d} \ln \frac{c}{a}$$

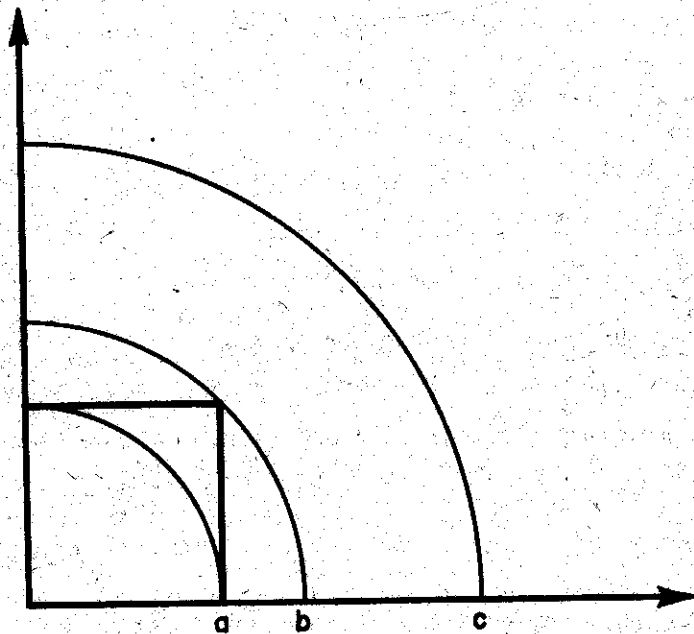


FIG. 4 Demostración de la concavidad de la curva $\frac{1}{G(\theta)}$ vs θ

Igualmente,

$$R_{bc} = \frac{2\ell}{\pi d} \ln \frac{c}{b}$$

Por lo tanto

$$\ln \frac{a}{b} < \beta R < \ln \frac{c}{a} \text{ donde } \beta = \frac{\pi d}{2\ell}$$

pero $b = \sqrt{2} a$ y si asumimos $c = 1$

nos queda que $-\ln b < \beta R < -\ln a$.

$$-\ln \sqrt{2} a < \beta R < -\ln a$$

pero como a es menor que la unidad, nos queda un número negativo, que con el signo menos de la expresión, puede escribirse como

$$\ln |\sqrt{2} a| < \beta R < |\ln a|$$

Anteriormente planteamos la función $\frac{1}{G(\theta)}$, por lo tanto nos interesa el valor de la función

$$\frac{1}{R(\theta)}, \text{ que es proporcional a ella.}$$

Así, tenemos que $\frac{1}{|\ln \sqrt{2} a|} > \frac{1}{|R_{\infty}|} > \frac{1}{|\ln a|}$

Esta expresión está en función de a que es la arista del contacto y por consiguiente es variable. Por ello la función que nos interesa es

$$f(\theta) = \frac{-I}{\ln \theta}$$

Para demostrar que esta función es cóncava hacia abajo en un entorno del origen, hay que demostrar que su segunda derivada en un entorno de éste es menor que cero, es decir, negativa.

Si calculamos la segunda derivada y analizamos para que valores de θ se cumple la condición ésta, tendremos:

$$f''(\theta) = \left[-\frac{1}{\theta^2} (\ln \theta)^{-2} \cdot \theta^{-1} (-2) (\ln \theta)^{-3} \frac{1}{\theta} \right]$$

pero $\ln \theta < 0$, por lo tanto $\ln \theta < -2$ $\theta < 0.135$

Por lo que para valores de $\theta < 0.135$, la concavidad de la curva es hacia abajo. Esto nos demuestra que, nues-

tra resistencia, acotada por las anteriormente mencionadas, también debe presentar una curva cóncava hacia abajo, en un entorno del origen y con tangente infinita en el origen.

CONCLUSIONES

Como conclusión podemos plantear que los resultados experimentales coinciden con los teóricamente esperados, por consiguiente estas fórmulas de sensibilidad y errores serán válidas y nos brindarán la oportunidad de conocer la sensibilidad del equipo que necesitamos para medir la corriente, así como el error que cometemos cuando medimos la resistividad, en dependencia del tamaño de los contactos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Van der Pauw,
Philips Research Report, Vol. 13, 1958, Holanda.
2. Lourido J.
Tesis de Especialidad, Universidad de La Habana.

Recibido 2-10-1982.