

COALESCENCIA DE PARTÍCULAS CONTROLADA POR DIFUSIÓN EN PRESENCIA DE UNA SEGUNDA TRANSFORMACIÓN.

N. Galeano

Dpto. de Física de los Metales. Universidad de La Habana.

H. López

Cátedra de Tecnología de los Metales. Escuela

Interarmas General Antonio Maceo

M. Tanus.

Departamento de Física. ISPJAE.

J.R. Quiñones

Dpto. de Física de los Metales. Universidad de La Habana.

RESUMEN

Una vez calculada la primera aproximación de Born para describir la evolución en el tiempo de la función de distribución de partículas que coalescen, estando la

coalescencia perturbada por una segunda transformación de fase, se pudo resolver la problemática incluyendo el caso de fuerte influencia de una segunda transformación de fase a través del método de las aproximaciones sucesivas. El cálculo se realizó en términos de un operador que cumple con las condiciones del Principio de las Transformaciones de Contracción o "Punto Fijo" lo que asegura la convergencia de la secuencia de aproximaciones sucesivas.

ABSTRACT

Once, the first Born's approximation is calculated to discard the evolution in time of the particle distribution function, the particle coarsening being disturbed by a second phase transformation, the problem could be solved by including the case of strong influence of a second phase transformation through the method of successive approximations. The calculation was done in terms of an operator that fulfils the conditions of the Principle of the Contraction Transformations or "Fixed Point" which assures the convergence of the sequence of successive approximations.

INTRODUCCIÓN

El proceso de formación de dos o más fases a partir de una solución sólida sobresaturada metaestable ocurre en tres etapas fundamentales: a) formación de los núcleos de la nueva fase, b) crecimiento de los núcleos a expensas de la matriz, c) crecimiento de los granos grandes de la nueva fase, a expensas de los más pequeños, una vez que se haya agotado el soluto de la matriz susceptible de participar en la reacción. Esta última etapa del proceso, en la que ocurre una redistribución de soluto entre las partículas, recibe el nombre de coalescencia y se produce con una fuerza motriz relacionada con el exceso de energía superficial del sistema de partículas dispersas.

La teoría inicial de la coalescencia de partículas esféricas controlada por la difusión en volumen fue debida a Lipshitz, Wagner y Slyozov [1]. Para su tratamiento cuantitativo introdujeron la función de distribución de partículas $N(r,t)$ definida de forma tal que el número de partículas por unidad de volumen con radio comprendido entre r y $r + dr$ es $N(r,t) dr$ y $N(r \rightarrow \infty, t) = 0$, para la que obtuvieron:

$$N(u,t) = \text{const. } u^2 (3+u)^{-7/3} (3/2-u)^{-11/3} \exp \frac{-3/2}{3/2-u}; \quad 0 \leq u < 3/2 \quad (1)$$

$$N(u, t) = 0 ; u \geq 3/2$$

Son pocos los sistemas de aleación en los que se ha corroborado esta teoría, Jack y Honeycombe, por ejemplo, comprobaron (1972) el cumplimiento de dicha teoría en la precipitación del compuesto metaestable isomorfo de Fe_3Si , así como pudieron determinar que era el Si el elemento que controlaba el proceso [2]. Trabajos más recientes han podido demostrar que estas condiciones de coalescencia (coalescencia libre) son muy restringidas y que cuando está presente una segunda transformación de fase que utilice el mismo soluto, la teoría debe ser modificada convenientemente [3], como se muestra en el presente trabajo para el caso de la coalescencia controlada por difusión en volumen de un precipitado esférico.

TRATAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE LA COALESCENCIA EN PRESENCIA DE UNA SEGUNDA TRANSFORMACIÓN

ANÁLISIS SEMICUANTITATIVO

Si se tiene en cuenta el efecto de una segunda transformación de fase, que nuclea y crece, utilizando para su desarrollo el mismo soluto que las partículas que coalescen, la hipótesis de que el volumen total de las partículas permanece constante a partir del cual se justifi-

ca el comportamiento asintótico de los volúmenes con el tiempo [3], no es cierta, ya que parte del soluto disuelto es utilizado por la segunda transformación.

Considerando los argumentos anteriores y suponiendo las concentraciones de soluto en la matriz relativamente bajas, puede plantearse que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (4/3 \pi r_i^3) + K' \frac{dw}{dt} = 0 \quad (2)$$

donde:

r_i : radio de la partícula i-ésima.

n : número de partículas.

$\frac{dw}{dt}$: velocidad de crecimiento de la nueva fase.

K' : constante particular para cada caso que representa el grado de dependencia que tiene el crecimiento de la segunda fase respecto del soluto que se disuelve en el proceso de coalescencia. Depende de factores geométricos, de la composición de soluto en el precipitado, etc.

Por un procedimiento análogo al seguido para la coalescencia libre [4], pero teniendo en cuenta el término $K' \frac{dw}{dt}$, se obtiene, para la velocidad de crecimien-

to de las partículas, la siguiente expresión:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left[\frac{2 \sigma \bar{V}^2 D C_{\infty}}{RT} \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{r} \right) - \frac{K'}{4 \pi n} \frac{dw}{dt} \frac{1}{r} \right] \quad (3)$$

donde:

σ : energía por unidad de área de la interfase matriz - partícula.

\bar{V} : volumen molar del soluto

D : coeficiente de difusión del soluto en la matriz en la zona cercana a una partícula de radio $r \rightarrow \infty$

R : constante molar de los gases

T : temperatura absoluta

\bar{r} : radio medio del sistema de partículas

De la expresión (3) puede obtenerse el radio crítico del sistema de partículas que resulta:

$$r_c = \frac{\bar{r}}{1 - x} \quad (4)$$

donde:

$$x = \frac{RTK'}{8 \pi \bar{V}^2 D n C_{\infty} \sigma} \frac{dw}{dt} \quad (5)$$

Evidentemente, $0 < x < 1$, esperándose que cuando la segunda transformación sólo perturbe el proceso de coalescencia, x sea cercana a cero y cuando su influencia sea fuerte, x sea cercana a uno

ANÁLISIS CUANTITATIVO. APROXIMACIÓN DE BORN

Se impone por lo tanto, el cálculo de la función de distribución de partículas bajo las mismas condiciones; para ello es necesario resolver la ecuación de continuidad [4]:

$$\frac{\partial N_3}{\partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial u^3} (N_3 \frac{d u^3}{d \theta}) \quad (6)$$

donde:

$$N(u, \theta) = 3 u^2 N_3(u^3, \theta)$$

$$\theta = \ln r_c^3$$

$$u = r/r_c$$

$$\frac{du^3}{d\theta} = \frac{dt^*}{d r_c^3} (u - 1) u^3 \quad (7)$$

$$t^* = \frac{6 \sigma \bar{V}^2 C_{\infty} D t}{RT}$$

Por un análisis físico puede demostrarse que la derivada $\frac{dt'}{dr_c^3} = \alpha - f \left(\frac{dw}{dt} \right)$; donde $\alpha = \frac{27}{4}$.

Es necesario entonces calcular $f \left(\frac{dw}{dt} \right)$ para el caso de coalescencia perturbada; para ello, tengamos en cuenta que $r_c = (1+x) \bar{r}$ y que por lo tanto:

$$r_c^3 = (1+3x) \bar{r}^3 \quad (8)$$

Derivando respecto a t' la expresión (8), se obtiene:

$$\frac{dr_c^3}{dt'} = \frac{d\bar{r}^3}{dt'} (1 + 3x)$$

y (9)

$$\frac{dt'}{dr_c^3} = \alpha (1 - 3x)$$

donde:

$$\alpha = \frac{27}{4}$$

Sustituyendo la expresión (5) en (9):

$$\frac{dt'}{dr_c^3} = \alpha - f \quad (10)$$

donde:

$$f = \frac{81 RTK'}{32\pi\sigma \bar{v}^2 C_\infty Dn} \frac{dw}{dt}$$

Una vez calculada $f \left(\frac{dw}{dt} \right)$, podemos escribir la forma de la derivada $\frac{du^3}{d\theta}$:

$$\frac{du^3}{d\theta} = \left(\frac{du^3}{d\theta} \right)_0 - f \cdot (u-1) \quad (11)$$

donde:

$$\left(\frac{du^3}{d\theta} \right)_0 = \alpha (u-1) - u^3$$

La ecuación (11) muestra que $\frac{du^3}{d\theta}$ no es independiente del tiempo y que por lo tanto, la ecuación de continuidad no puede resolverse por separación de variables.

La ecuación de continuidad, que puede escribirse en forma integral como:

$$N_3(u^3, \theta) = N_3(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[N_3(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] d\theta \quad (12)$$

donde:

θ_0 : corresponde al instante de tiempo en que comienza la segunda transformación de fase.

Tiene que ser resuelta ahora por otro método. Hemos escogido el método de las aproximaciones sucesivas.

Cuando la segunda transformación de fase, que nuclea y crece utilizando para su desarrollo el mismo soluto que la coalescencia, solamente "perturba" a dicho proceso, es suficiente el cálculo de la primera aproximación del método de las aproximaciones sucesivas:

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[N_3^{(0)}(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] d\theta \quad (13)$$

a la cual se le impuso la condición $N_3(u^3, \theta_0) =$

$N_3^0(u^3, \theta_0)$ donde $N_3^0(u^3, \theta_0)$ es la función de distribución de Lipshitz, Slyozow y Wagner (L.S.W.).

El cálculo de esta primera aproximación se realizó tomando como aproximación de orden cero la función de distribución de L.S.W., es decir $N_3^{(0)}(u^3, \theta) =$

$N_3^0(u^3, \theta)$; el hecho de haber tomado como aproximación de orden cero la función de distribución correspondiente al problema no perturbado (coalescencia libre) es lo que se conoce como aproximación de Born. Por lo tanto, para la primera aproximación de Born, obtuvimos:

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[N_3^0(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] d\theta \quad (14)$$

Sustituyendo en la ecuación (14) las expresiones

(1) y (11):

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[(u-1) N_3^0(u^3, \theta) \right] d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[N_3(u^3, \theta) \left(\frac{du^3}{d\theta} \right) \right]_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\text{Pero, } N_3^0(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[N_3^0(u^3, \theta) \left(\frac{du^3}{d\theta} \right) \right]_{\theta_0}^{\theta} d\theta.$$

Por lo tanto:

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[(u-1) N_3^0(u^3, \theta) \right] d\theta \quad (15)$$

$$\text{Llamando } g(u) = (\text{constante}) u^2 (3+u)^{-7/3} (3/2-u)^{-11/3} \exp \frac{-3/2}{3/2-u}$$

la expresión (15) podrá escribirse como:

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = \frac{g(u)}{r_c^3} + \int_{\theta_0}^{\theta} f \frac{\partial}{\partial u^3} \left[(u-1) \frac{g(u)}{r_c^3} \right] d\theta$$

y teniendo en cuenta que r_c^3 es independiente de u y que las funciones de u no dependen de θ :

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = \frac{g(u)}{r_c^3} + \frac{g(u)}{3u^2} \left\{ 1 + \alpha(u) \beta(u) \right\} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{f}{r_c^3} d\theta \quad (16)$$

donde:

$$\alpha(u) = u-1$$

$$\beta(u) = -\frac{7}{3} (3+u)^{-1} + \frac{11}{3} (3/2-u)^{-1} - 3/2 (3/2-u)^{-2}$$

que es la expresión final para el cálculo de la primera aproximación de Born para coalescencia perturbada.

CONVERGENCIA DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

APROXIMACIÓN DE LAS ÓRDENES SUPERIORES

Si la influencia de la segunda transformación es fuerte, pudiendo incluir el caso de disolución total de las

partículas, es necesario continuar el proceso de obtención de la solución por aproximaciones sucesivas, la convergencia de las cuales está garantizada por el principio de las Transformaciones de contracción [5] a través de la introducción del operador:

$$A [N_3(u^3, \theta)] = N_3(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left([N_3(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta} \right) d\theta \quad (17)$$

dado en el espacio métrico C de las funciones continuas. Demostraremos a continuación que dicho operador satisface las condiciones del principio.

Condición 1: si $N_3(u^3, \theta) \in C$, entonces $A [N_3(u^3, \theta)] \in C$

En la expresión (17) para que el segundo miembro sea una función continua, $N_3(u^3, \theta_0)$ y $\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left([N_3(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta} \right) d\theta$ tienen que ser continuas; la continuidad de la integral se demuestra fácilmente por el teorema de Newton-Leibniz. Por lo tanto, con la condición de que $N_3(u^3, \theta)$ pertenezca al espacio métrico de las funciones continuas se garantiza que el operador A transforme a dichas funciones en funciones del mismo espacio si $N_3(u^3, \theta_0)$, $\frac{du^3}{d\theta}$, y $\frac{\partial N_3(u^3, \theta)}{\partial u^3}$ son continuas. La continuidad de estas fun-

ciones es evidente del hecho que $N_3(u^3, \theta_0)$ es la distribución de partículas en el instante inicial, $\frac{\partial N^3}{\partial u^3}$

es la variación de la función de distribución con el volumen de las partículas y $\frac{du^3}{d\theta}$ la variación del volumen de las partículas con el tiempo. Así, $A [N_3(u^3, \theta)] \in C$

Condición 2: el operador A acerca los puntos, o sea:

$$\rho(A [N_{3,1}(u^3, \theta)] ; A [N_{3,2}(u^3, \theta)]) \leq \gamma \rho(N_{3,1} ; N_{3,2})$$

donde $N_{3,1}$ y $N_{3,2}$ son dos puntos cualesquiera del espacio c ,

$$\gamma < 1 \text{ y } \rho(A [N_{3,1}(u^3, \theta)] ; A [N_{3,2}(u^3, \theta)]) \text{ es la}$$

distancia entre los puntos $N_{3,1}$ y $N_{3,2}$:

$$\rho(A [N_{3,1}(u^3, \theta)] ; A [N_{3,2}(u^3, \theta)]) = \max$$

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} ([N_{3,1}(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta}) d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} ([N_{3,2}(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta}) d\theta \right| \quad (18)$$

Analícemos si las funciones $N_{3,1}(u^3, \theta)$ y $N_{3,2}(u^3, \theta)$ cumplen la condición de Lipshitz para lo que demostraremos que se cumple la condición más grosera:

$$\left| \frac{\partial}{\partial N_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} N_3(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right) \right| \leq N$$

donde N es una constante.

Si las derivadas $\frac{\partial^2 N_3(u^3, \theta)}{\partial N_3 \partial u^3}$ y $\frac{\partial^2 N_3(u^3, \theta)}{\partial u^3 \partial N_3}$ son con-

tinuas:

$$\left| \frac{\partial}{\partial N_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} N_3(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u^3} \left[\frac{\partial}{\partial N_3} N_3(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] \right|$$

De donde se obtiene:

$$\left| \frac{\partial}{\partial N_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} N_3(u^3, \theta) \frac{du^3}{d\theta} \right] \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{du^3}{d\theta} \right) \right|$$

Cómo $\frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{du^3}{d\theta} \right)$ es acotado ($\frac{du^3}{d\theta}$ es la variación

del volumen de las partículas en el tiempo, es decir una función continua y acotada), se cumple la condición de Lipshitz y la expresión (18) toma la forma:

$$\begin{aligned} \rho(A [N_{3,1}(u^3, \theta)] ; A [N_{3,2}(u^3, \theta)]) &\leq N \max \left| \int_{\theta_0}^{\theta} N_{3,1}(u^3, \theta) - \right. \\ &\left. - N_{3,2}(u^3, \theta) \right| d\theta \\ &\leq N \max |N_{3,1}(u^3, \theta) - N_{3,2}(u^3, \theta)| \max \int_{\theta_0}^{\theta} |d\theta| = \\ &= N H_0 \rho(N_{3,1}(u^3, \theta) ; N_{3,2}(u^3, \theta)) \end{aligned}$$

Tomando H_0 de manera que $NH_0 \leq \delta < 1$, se logra que el operador A satisfaga la condición:

$$\rho(A [N_{3,1}(u^3, \theta)] ; A [N_{3,2}(u^3, \theta)]) \leq \delta \rho(N_{3,1}(u^3, \theta) ; N_{3,2}(u^3, \theta)).$$

De este modo, cumpliéndose la continuidad de las funciones $N_3(u^3, \theta)$, $\frac{du^3}{d\theta}$, $\frac{\partial^2 N_3(u^3, \theta)}{\partial u^3 \partial N_3}$ y $\frac{\partial^2 N_3(u^3, \theta)}{\partial N_3 \partial u^3}$,

el operador A cumple las condiciones del Principio de las Transformaciones de contracción según el cual existe un punto fijo único $\bar{N}_3(u^3, \theta)$ del operador A , o lo que es lo mismo, una solución única continua de la ecuación de continuidad que puede ser hallada por el método de las aproximaciones sucesivas:

$$\begin{aligned} N_3^{(1)}(u^3, \theta) &= N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [N_3^0(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta} d\theta \quad (a) \\ N_3^{(2)}(u^3, \theta) &= N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [N_3^{(1)}(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta} d\theta \quad (b) \\ \vdots \\ N_3^{(n)}(u^3, \theta) &= N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [N_3^{(n-1)}(u^3, \theta)] \frac{du^3}{d\theta} d\theta \quad (c) \end{aligned} \quad (19)$$

en las que se ha tomado $N_3(u^3, \theta_0) = N_3^0(u^3, \theta_0)$ y

$$N_3^{(0)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta)$$

APROXIMACIÓN N-ÉSIMA PARA COALESCENCIA PERTURBADA

Anteriormente, hemos obtenido para la primera aproximación de Born para la coalescencia perturbada:

$$N_3^{(1)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [g(u) \cdot (u-1)] \frac{f}{r_c} d\theta \quad (20)$$

Por lo tanto, para la segunda aproximación, combinando (20) y (19-b):

$$\begin{aligned} N_3^{(2)}(u^3, \theta) &= N_3^0(u^3, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [N_3^0(u^3, \theta)] + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [(u-1) g(u)] \cdot \frac{f}{r_c} d\theta \left. \frac{du^3}{d\theta} \right] d\theta \quad (21) \end{aligned}$$

expresión que puede transformarse en la siguiente,

$$\begin{aligned} N_3^{(2)}(u^3, \theta) &= N_3^0(u^3, \theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} [(u-1) g(u)] \frac{f}{r_c} d\theta - \\ &- \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left\{ (u-1) g(u) \right\} \frac{f}{r_c} d\theta \right\} \frac{du^3}{d\theta} d\theta \end{aligned}$$

luego de la sustitución en (21) de las expresiones (1) y (11)

Aplicando sucesivamente el operador A, se obtendrá para la aproximación de orden n:

$$N_3^{(n)}(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B_i \quad (22)$$

$$B_i = \begin{cases} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[B_{i-1} \frac{du^3}{d\theta} \right] d\theta & \text{para } i = 2, 3, \dots \\ \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial u^3} \left[(u-1) g(u) \right] \frac{f}{r_c} d\theta & \text{para } i = 1. \end{cases}$$

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA SOLUCIÓN PARA LA COALESCENCIA PERTURBADA

La solución general de la ecuación de continuidad para coalescencia perturbada será:

$$\bar{N}_3(u^3, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[N_3^0(u^3, \theta) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B_i \right]$$

$$\bar{N}_3(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} B_i \quad (23)$$

Para los instantes finales de la segunda transformación, $w=1$ y $\frac{dw}{dt} = 0$, por lo tanto, $f=0$ y $B_1 = B_2 = \dots =$

$B_n = \dots = 0$; así la solución general es portadora del hecho de que en los instantes finales de la segunda transformación, la función de distribución coincide con la coalescencia libre, es decir, $\bar{N}_3(u^3, \theta) = N_3^0(u^3, \theta)$ si $w=1$.

CONCLUSIONES

- 1.- Se logró resolver la ecuación de continuidad para la coalescencia perturbada empleando la primera aproximación de Born.
- 2.- Se demostró que es posible aplicar el Principio de las transformaciones de contracción a la solución de la ecuación de continuidad para coalescencia perturbada y obtener así aproximaciones de órdenes superiores al primero.
- 3.- La solución general obtenida refleja que para los instantes finales de la segunda transformación, los términos de perturbación se anulan y que para esos instantes la solución coincide con la función de distribución de coalescencia libre.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Lipshitz, I.M. y W.V. Slyozov.
J.Phys. Chem. Solids. V. 19 Nos. 1-2, 1961.
- 2 D.H., Jack y R.W.K. Honeycombe.
Acta Metallurgica, V. 20, Junio 1972.
3. Galeano, N.
Tesis, Universidad de Nancy, 1976.
- 4 Tanus, M.
Trabajo de Diploma, Universidad de La Habana, 1981.
- 5 Elsgotz, L.
Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional,
Editorial MIR, Moscú, 1969.

Recibido 16-3-82.