

CONDENSACIÓN DE BOSE-EINSTEIN EN TEORÍAS CON INVARIANZA DE CALIBRACIÓN

Augusto González

Instituto de Investigación Técnica Fundamental

Academia de Ciencias

RESUMEN

La técnica del potencial efectivo es generalizada a sistemas con un número conservado de partículas y aplicada al estudio de la condensación de Bose-Einstein del campo escalar en un modelo basado en el grupo no abeliano $SU(2)$. La densidad de carga presente actúa como un factor de rompimiento de simetría. La condensación se produce en el plano del espacio interno ortogonal a la dirección de la carga conservada. Se calcula el potencial efectivo en un lazo y a partir de él, se halla la temperatura crítica para la condensación de BE.

ABSTRACT

The effective potential technique is extended to systems with a conserved charge and applied to study the Bose-Einstein condensation of the scalar field in a model based on the non-abelian group $SU(2)$. The charge density

acts as a symmetry-breaking factor. It is shown that the Bose condensate lies in a plane orthogonal to the direction of the conserved charge in the internal space. By calculating the one loop effective potential the critical temperature for the BE condensation is found.

INTRODUCCIÓN

En fecha reciente, los problemas de transiciones de fase en modelos de la Teoría de Campos han despertado un amplio interés /1/. Muchos fenómenos conocidos de la Física Experimental tales como la superfluidez, el efecto Meissner, la condensación de BE, etc /2/, han hallado en estos modelos su análogo covariante /1,3,4/.

En el presente trabajo se estudia la condensación de BE. Es conocido que en un sistema de bosones con una densidad finita, al disminuir la temperatura por debajo de cierto valor, que denominaremos temperatura crítica, tiene lugar la condensación de BE (condensación de partículas en el espacio de Fourier). La condensación de BE constituye una transición de fase de 2da especie: el calor específico sufre una discontinuidad en el punto de la transición. Cualitativamente, el fenómeno se explica como la modificación, cuando disminuye la temperatura, del peso estadístico del estado básico en las propiedades termodinámicas del sistema. A temperaturas altas, el número de partículas en dicho estado es despreciable: $N_0 \sim 1$, mientras que, cuando $T \rightarrow 0$ tenemos $N_0 \sim N$ (número

total de partículas) y el estado básico determina las propiedades termodinámicas, en especial el calor específico que sufre una discontinuidad.

En el espacio k , el estado básico corresponde a $k=0$. Por otra parte, en el desarrollo de Fourier del campo, $k=0$ se relaciona con la componente constante (independiente de las coordenadas) Esto permite tratar la condensación de BE de forma análoga al rompimiento de simetría /5/, es decir, analizando si en el sistema es energéticamente favorable un valor medio no nulo del campo $\langle \phi \rangle = \text{const} \neq 0$

El sistema físico a estudiar se compone de bosones escalares y vectoriales, interactuando invariante respecto a las transformaciones del grupo de calibración no abeliano $SU(2)$ /6/. Este sistema es de interés ya que coincide con el sector bosónico del modelo de Georgi-Glashow /7/, uno de los primeros intentos de unificar las interacciones electromagnéticas con las débiles.

Con miras a analizar la condensación de BE se halla el potencial efectivo del sistema /5/. Un análisis del potencial efectivo conduce a que energéticamente es más favorable la condensación en el plano del espacio interno ortogonal a la dirección de la carga conservada. Después se estima la temperatura crítica a la cual se produce la transición.

La condensación de BE en diversos modelos de la Teoría de Campos y su relación con el rompimiento de simetría ha sido estudiada por Kapusta /3/, el cual utiliza un método semiclásico consistente en hallar el promedio estadístico de las ecuaciones de Lagrange. En el presente trabajo se analiza un modelo diferente y se recurre a un método también diferente. El cálculo del potencial efectivo es una vía más sistemática que permite, por ej, considerar sistemas en los que las primeras correcciones cuánticas juegan un papel predominante en la dinámica /8,9/ y analizar, en este contexto, la condensación de BE.

POTENCIAL EFECTIVO

El objetivo del presente parágrafo es extender la técnica del potencial efectivo al estudio de sistemas con una densidad conservada de carga. Nos concretaremos al modelo que nos interesa aunque la argumentación es válida para un grupo de calibración simple cualquiera. La dinámica del sistema es descrita por la lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4} \left(F_{\alpha\gamma}^a \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha}^a \varphi^a - e \epsilon^{abc} A_{\alpha}^b \varphi^c \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\varphi^a \varphi^a) - \frac{1}{4} \lambda (\varphi^a \varphi^a)^2 \quad (1)$$

Se ha utilizado para los escalares la representación adjunta /6/. ϵ^{abc} son las constantes completamente

antisimétricas $\epsilon^{123} = 1$. Los índices de grupo a,b,... toman valores 1, 2 y 3. Las tres componentes del campo escalar φ^a son reales. $F_{\alpha\gamma}^a = \delta_{\alpha}^a A_{\gamma}^a - \delta_{\gamma}^a A_{\alpha}^a + e \epsilon^{abc} A_{\alpha}^b A_{\gamma}^c$ es el tensor del campo A_{α}^a y e la constante de acoplamiento del grupo. En el modelo $m^2 < 0$, indicando que la simetría se rompe espontáneamente.

En Teoría del Campo, a partir de (1), se construye el funcional generatriz de las funciones de Green, que tiene la siguiente expresión en términos de integrales funcionales /6/

$$Z(J,K) = \int (d\varphi) (d\Pi) (d\bar{A}) (d\bar{E}) (dA_{\alpha}) \delta(Y) \det(M_Y) \exp / d^4x (L + JA + K\varphi) \quad (2)$$

Π y \bar{F} son las variables conjugadas canónicas de φ y \bar{A}_{α} , es un multiplicador de Lagrange. $Y=0$ es la condición canónica que fija la calibración y $\det(M_Y)$ el determinante funcional asociado. Su misión en Z consiste en elegir el representante dentro de la clase de campos A físicamente equivalentes /6/. En (2) la lagrangiana L de ser escrita en forma hamiltoniana

$$L = i\bar{F}\delta_{\alpha}\bar{A} + \Pi\delta_{\alpha}\varphi - H(\bar{E}, \bar{A}, \Pi, \varphi) + iA_{\alpha}\beta \quad (3)$$

H es densidad de hamiltoniano. β es el generador de las transformaciones infinitesimales del grupo, tiene forma de ley de Gauss

$$\beta^a = \bar{\delta}_{\alpha} \bar{E} - e \rho^a \approx 0$$

donde la densidad de carga ρ^a (cuarta componente de la corriente de Noether asociada a la invarianza SU(2)

global de la lagrangiana) se compone de dos términos: uno proveniente de los escalares y otro suministrado por los vectores si el campo A es no abeliano.

Respecto a las variables Π y \bar{F} la integración en (2) es gaussiana y puede efectuarse, resultando

$$Z(J,K) = \int (d\phi) (dA) \delta(Y) \det(M_Y) \exp \int d^4x (L+JA+K\phi) \quad (4)$$

donde ahora L viene dada por (1) y $dA = d\bar{A}dA_4$. La expresión (4) para Z permite desarrollar la Teoría de Perturbaciones separando en L los términos libres y de interacción. En especial, las funciones de Green, definidas como

$$G_{AA}(x,y) = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z(J,K)}{\delta J(x) \delta J(y)}, \text{ etc}$$

pueden también calcularse perturbativamente. Los valores clásicos de los campos se definen

$$A_c = \frac{\delta \ln Z}{\delta J}, \quad \phi_c = \frac{\delta \ln Z}{\delta K}$$

Z genera todas las funciones de Green. Las funciones de Green irreducibles de una partícula se obtienen de la acción efectiva

$$S_{ef}(A_c, \phi_c) = -\ln Z(J,K) + \int d^4x (JA_c + K\phi_c) \quad (5)$$

que se interpreta como energía asociada a los valores clásicos de campos A_c y ϕ_c /10/. S_{ef} satisface

$$\frac{\delta S_{ef}}{\delta A_c} = J, \quad \frac{\delta S_{ef}}{\delta \phi_c} = K \quad (6)$$

El potencial efectivo se define como la densidad de acción efectiva

$$S_{ef}(A_c, \phi_c) = \int d^4x V(A_c, \phi_c)$$

cuando los campos clásicos A_c y ϕ_c no dependen de las coordenadas, la integración en x se convierte en multiplicación por el volumen del espacio-tiempo. Combinando (4) y (5) escribimos

$$\exp(-\text{vol} \cdot V(A_c, \phi_c)) = \int (d\phi) (dA) (d\tau) (d\bar{c}) (dc) \cdot$$

$$\exp \int d^4x (L+L_g + J(A-A_c) + K(\phi-\phi_c)) \quad (7)$$

donde hemos utilizado la representación funcional de la delta (τ es el multiplicador de Lagrange asociado) y se ha representado el determinante en términos de las variables anticonmutativas \bar{c} y c /6/. L_g recoge ambas contribuciones

$$L_g = \tau Y - \frac{1}{2} \bar{c} M_Y c$$

La fórmula (7) permite una expresión diagramática para $V(A_c, \phi_c)$ denominada desarrollo en lazos /11/. Haciendo el cambio $A \rightarrow A_c + A$, $\phi_c + \phi$ y procediendo como en /11/, obtenemos

$$V(A_c, \phi_c) = V_0(A_c, \phi_c) - \ln Z_1 \quad (8)$$

donde V_0 , denominado aproximación clásica, es el término de energía potencial en la lagrangiana (1)

$$L = \begin{matrix} \text{términos} \\ \text{cuadráticos} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{términos de interacción} \\ \text{con derivadas} \end{matrix} - V_0(A_c, \phi_c)$$

y $\ln Z_1$ se compone de todos los diagramas irreducibles de una partícula, generados por la lagrangiana

$$L_{ef} = (L+L_g)_{A_C + \Phi} - (L+L_g)_{A_C} - A \frac{\delta}{\delta A} (L+L_g)_{A_C} - \Phi \frac{\delta}{\delta \Phi} (L+L_g)_{A_C}$$

los dos primeros términos de (8) constituyen la aproximación de un lazo

$$V(A_C, \Phi_C) = V_0(A_C, \Phi_C) + V_1(A_C, \Phi_C)$$

V_1 se construye a partir de la parte cuadrática de L_{ef}

$$V_1(A_C, \Phi_C) = \int (d\phi) (dA) (d\tau) (dc) (dc) \exp \int d^4x L_0 \quad (9)$$

Efectuando la integral (gaussiana), V_1 puede expresarse en la forma

$$V_1(A_C, \Phi_C) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega} \ln(k_4^2 + \omega^2) \quad (10)$$

donde la suma se realiza sobre todas las frecuencias propias de los campos ω . Estas frecuencias pueden ser, en general, complejas. La parte imaginaria correspondiente de V_1 reflejará entonces la inestabilidad del estado con valores de campos A_C y Φ_C . La contribución de V_1 al potencial efectivo es infinita y requiere una regularización.

En otras palabras, se hace necesario extraer de la expresión (10) la parte finita, dependiente de los campos A_C y Φ_C .

Todos los conceptos anteriores (fórmulas 2-10) pueden extenderse a la Termodinámica /12,13/. Según Fradkin /12/, la teoría a temperatura finita ($T \neq 0$) es equivalente a la Teoría del Campo ($T = 0$) en variables euclídeas imponiendo las restricciones

i) $0 < x_4 < 1/T$

ii) Los campos son periódicos en x_4 con periodo $1/T$ (bosones).

En especial, las condiciones i) y ii) implican que en (10) debe sustituirse

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_4} = 2\pi nT$$

Al realizar la suma en k_4 /12/, cada factor del tipo $\frac{1}{2} \ln(k_4^2 + \omega^2)$ dará lugar a un término

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{2} + T \ln(1 - \exp -\omega/T) \right]$$

donde, el primer sumando puede reducirse a (10) mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_4 \ln(k_4^2 + \omega^2) = 2\pi\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_4 \ln k_4^2$$

y el segundo tiene una interpretación termodinámica evidente como energía libre de los bosones.

En resumen: a temperatura finita el potencial efectivo se escribe

$$V(A_c, \phi_c) = V_0(A_c, \phi_c) + V_1(A_c, \phi_c) + V_1(A_c, \phi_c, T) + \dots (11)$$

La parte dependiente de la temperatura tiene la siguiente expresión asintótica cuando $T \rightarrow \infty$ /14/

$$V_1(A_c, \phi_c, T) = \frac{T^2}{24} \left[\int_e \delta m_e^2 + 3 \int_v \delta m_v^2 \right] (12)$$

donde δm_e^2 y δm_v^2 son respectivamente los términos de masa al cuadrado inducidos en los escalares y los vectores por el desplazamiento $A \rightarrow A_c + A$, $\phi \rightarrow \phi_c + \phi$.

Ahora podemos considerar sistemas con un valor de carga neta. Estos sistemas se describen por el ensamble Gran Canónico y la matriz densidad se construye con el hamiltoniano ampliado

$$H' = H - \mu \int d^3x \rho^a$$

donde el multiplicador de Lagrange μ^a es denominado potencial químico. El hamiltoniano H' debe insertarse en (2) para formar los términos del exponente pueden agruparse de la siguiente manera

$$\dots + i(A_4^a + i\mu^a/e)\beta^a$$

Esto se hizo agregando el término $-\frac{1}{e} \mu^a \bar{\delta} \cdot \bar{E}$ que tiene forma de divergencia. Después se integra en Π y \bar{E} resultandó una expresión análoga a (4), con la diferencia que no se reobtiene la forma inicial (1) de la langragia-

na sino una lagrangiana dependiente del potencial químico

$$L(\mu) = L(A_4^a + i\mu^a/e) (13)$$

Este es el resultado principal del párrafo: la teoría a temperatura y densidad finitas es análoga a la Teoría de Campos usual, con las condiciones

- i) $0 < x_4 < 1/T$
- ii) Los campos son periódicos en x_4
- iii) Z se construye con $L(\mu) = L(A_4^a + i\mu^a/e)$

Los razonamientos posteriores se repiten con ligeras modificaciones. La fórmula (8) se reobtiene con magnitudes V_0 , L_{ef} dependientes de μ . En fin, llegamos a la siguiente expresión, análoga a (11)

$$V(A_c, \phi_c) = V_0(A_c, \phi_c, \mu) + V_1(A_c, \phi_c, \mu) + V_1(A_c, \phi_c, \mu, T) + \dots (14)$$

La expresión (14) constituye la base del estudio de la condensación de BE en el modelo que analizamos.

CONDENSACIÓN DE BOSE-EINSTEIN

Supongamos que, en el modelo considerado, la carga conservada está en la dirección (0,0,1) del espacio interno, o sea $\mu^a = \mu \delta^{a3}$. Supongamos además, por simplificar, que sólo el campo escalar genera un valor medio no nulo /15/. Esto significa, en términos de las ecuaciones (6), que debemos fijar la corriente J y buscar el valor medio de campo $\phi = \langle \phi \rangle$ que satisfacen

$$\frac{\delta}{\delta A} V(0, \langle \varphi \rangle) = J, \quad \frac{\delta}{\delta \varphi} V(0, \langle \varphi \rangle) = 0$$

Veamos entonces los distintos términos de V en (14). De la lagrangiana (1) se desprende que

$$V_0(A, \varphi) = \frac{e^2}{4} (\epsilon^{abc} A_a^b A_c^a)^2 + \frac{e^2}{2} (\epsilon^{abc} A_a^b \varphi_c^a)^2 + \frac{m^2}{2} (\varphi^a \varphi_a) + \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi_a)^2 \quad (15)$$

Para obtener $V_0(A_c, \varphi_c, \mu)$ se hace $A_4^3 \rightarrow A_4^3 + i\mu/e$ y después se sustituyen los campos por sus valores clásicos. Resulta

$$V_0(0, \varphi_0, \mu) = -\frac{\mu^2}{2} ((\varphi_0^1)^2 + (\varphi_0^2)^2) + \frac{m^2}{2} (\varphi_0^a \varphi_0^a) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_0^a \varphi_0^a)^2$$

El mínimo de V_0 se alcanza en el plano perpendicular a la dirección de la carga. El significado de este hecho es evidente: si $(0,0,1)$ designa la dirección electromagnética en el espacio interno, entonces las componentes $\varphi^{1,2}$ tienen carga eléctrica y el condensado que ellas aportan contribuye a la carga total del sistema. Hagamos, por ej, $\varphi_c^a = \varphi_c \delta^{a1}$, entonces

$$V_0(\varphi_c, \mu) = \frac{1}{2} (m^2 - \mu^2) (\varphi_c)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi_c)^4 \quad (16)$$

El gráfico de V_0 vs φ_c se muestra en la Fig 1. V_0 tiene un mínimo en el valor

$$\varphi_c^0 = \sqrt{\frac{|m^2 - \mu^2|}{2}} \quad (17)$$

Las correcciones radiativas al sistema, dadas por el término $V_1(\varphi_c, \mu)$ pueden no tenerse en cuenta si aceptamos la hipótesis de que λ y e son del mismo orden. Existen modelos, como la Electrodinámica de Coleman y Weinberg /8/, en los cuales el término V_1 juega un papel primordial y no puede despreciarse. Sin embargo, la consideración de las correcciones radiativas en presencia de μ requiere una atención especial y se sale de los marcos del presente trabajo /9/.

En lo que respecta a la contribución térmica $V_1(\varphi_c, \mu, T)$, puede demostrarse, de forma análoga a como se hizo en /14/, que para valores de T muy grandes es válida la expresión asintótica (12). En realidad a (12) hay que agregar términos proporcionales a $\mu^2 T^2$ que, por no depender de los campos, carecen de interés.

Ante el cambio $\varphi \rightarrow \varphi_c + \varphi$ son inducidos los siguientes términos δm^2

$\lambda(\varphi_c)^2$ en dos escalares

$\lambda(\varphi_c)^2$ en un escalar

$e^2(\varphi_c)^2$ en dos vectores

Y por tanto, el potencial efectivo en la aproximación de un lazo, salvo términos independientes de φ_c , se escribe

$$v(\varphi_c) = \frac{1}{2} (m^2 - \mu^2) (\varphi_c)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi_c)^4 + \frac{T^2}{24} (5\lambda + 6e^2) (\varphi_c)^2 \quad (18)$$

En términos de V la transición de fase tiene la siguiente descripción energética: cuando la temperatura es muy alta V tiene el mínimo en $\varphi_c = 0$, Fig 2 curva a). Si disminuimos la temperatura, la curvatura en $\varphi_c = 0$ comienza a disminuir hasta el valor 0, Fig 2 curva b). Esto se logra cuando

$$T^2 = T_c^2 = \frac{12(\mu^2 - m^2)}{5\lambda + 6e^2} \quad (19)$$

Por debajo de T_c la curvatura de V en $\varphi_c = 0$ es negativa y el mínimo se alcanza en un valor $\varphi_c = \langle \varphi \rangle \neq 0$. En especial, a $T=0$: $\langle \varphi \rangle \varphi_c^0$ dado por (17), Fig 2 curva c). El parámetro de orden $\langle \varphi \rangle$ varía continuamente, indicando que la transición de fase es de segunda especie.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se extendió la técnica del potencial efectivo al estudio de transiciones de fase en sistemas con un valor no nulo de carga neta. Esta técnica se aplicó al estudio de la condensación de BE en un sistema de campos escalares y vectoriales interactuando invariamente respecto a las transformaciones del grupo $SU(2)$.

La condensación se produce ortogonalmente a la dirección de la carga conservada en el espacio interno. Se halló la temperatura crítica de la transición

$$T_c^2 = \frac{12(\mu^2 - m^2)}{5\lambda + 6e^2}$$

La expresión hallada para T_c permite construir un diagrama de fases T vs μ , Fig 3. Por debajo de la curva crítica está presente la fase condensada que desaparece cuando $T > T_c$. En el eje $\mu=0$ tiene lugar el rompimiento espontáneo de la simetría, que se restablece al aumentar la temperatura por encima de

$$T_0 = \sqrt{\frac{-12m^2}{5\lambda + 6e^2}}$$

Dicho diagrama debe complementarse con la dependencia entre μ, N y T dada implícitamente a través de la expresión

$$N = T \frac{\delta}{\delta \mu} \ln Z$$

AGRADECIMIENTO

El autor agradece los comentarios críticos y sugerencias al trabajo de parte de los compañeros H. Pérez, A. V. de la Incera, F. Ferrer y F. Casado.

BIBLIOGRAFÍA

1. Véase un resumen en A.D.Linde, Rep Prog Phys 42, 389 (1979).
2. L.D. Landau y F.M. Lifshitz, Statistical Physics, Pergamon (1958). A.L. Fetter y J.D. Walecka, Quantum Theory of Many Particle Systems, Mc Graw-Hill (1971).
3. J.F. Kapusta, Phys Rev 24D,426 (1981).
4. G.M. Shore, Ann Phys 134,259 (1981) J. Magpantay, C. Mukku y W.A. Sayed, Phys Lett,106B,399 (1981)
5. Una bonita discusión sobre rompimiento de simetría puede hallarse en: S. Coleman, Secret Symmetry, escuela de verano Ettore Majorana-1973 (no publicado).
6. L.D. Fadeev y A.A. Slavnov, Gauge Theories, Benjamin (1980).
7. H. Georgi y S.L. Glashow, Phys Rev Lett 22, 1494 (1972).
- 8- S. Coleman y E. Weinberg, Phys Rev 7D, 1880 (1973).
9. La influencia de las correcciones radiativas sobre la condensación de bosones será presentada en una publicación posterior.
10. E.S. Abers y B.W Lee, Phys Rep 9C,1 (1973).
11. R. Jackiw, Phys Rev 9D, 1686 (1974).

12. E.S. Fradkin, Proc Lebedev Phys,Inst, vol. 19, Nauka (1965).
13. C. G. Callan, Phys Rev 9D,3312 (1974).
14. L. Dolan y R. Jackiw, Phys Rev 9D,3320 (1974). S. Weinberg, Phys Rev 9D,3357 (1974).
15. Es conocido, no obstante, que el campo vectorial no abeliano también sufre condensación de BE: A.D. Linde, Phys Lett 86B, 39 (1979).

Recibido 27.10.82

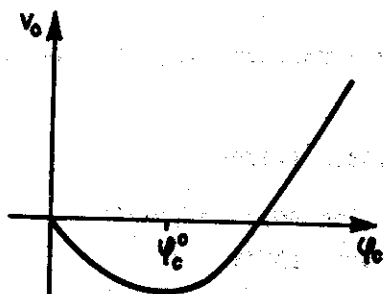


Figura 1
Potencial efectivo en la
aproximación clásica

Figura 2
Descripción energética de
la transición de fase

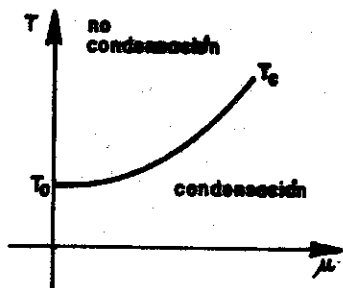
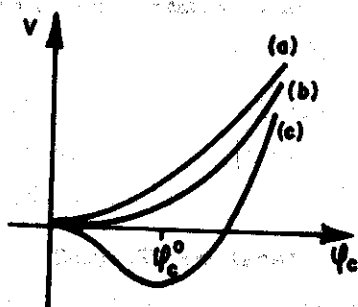


Figura 3
Diagrama de fases para el
sistema considerado