

# Cálculo del potencial termodinámico para un sistema de Yang-Mills-Higgs con potencial químico en presencia de carga externa

F.J.Ferrer y V. de la Incera. IMACC. Academia de Ciencias de Cuba

## RESUMEN

---

En el presente trabajo se discute la necesidad de introducir una carga externa de fondo en un sistema de Yang-Mills-Higgs (Y-M-H) con potencial químico  $\mu$  y temperatura finita a partir del formalismo de la integral funcional. Se analiza la variación que introduce en la cuantificación del sistema la presencia de una carga externa Abelian. Finalmente se halla el espectro de partículas y el potencial termodinámico en la aproximación de un solo lazo.

## ABSTRACT

---

Starting from the path integral formalism we discuss the necessity to introduce an external background charge in the Yang-Mills-Higgs system with chemical potential at finite temperature. We analyze the variation introduced in the quantification procedure by such an external charge, and finally we obtain the particle spectrum and the thermodynamical potential in the one loop approximation for the above mentioned system.

---

## INTRODUCCIÓN

---

En el decursar de estas tres últimas décadas la teoría de campo a temperatura finita y densidad distinta de cero ( $\mu \neq 0$ )<sup>1,2,3</sup> se ha abierto paso con avances teóricos cruciales.

Por citar algunos de sus resultados más significativos recordemos cómo en la materia superdensa o a temperaturas suficientemente altas, tiene lugar en las teorías de calibración con rompimiento espontáneo de la simetría una transición de fase mediante la cual se restaura la simetría originalmente rota entre interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas<sup>4,5,6</sup>). Por otra parte, se tiene también que el tratamiento de dos problemas de marcada actualidad: la cosmología a la luz de las partículas elementales y la colisión de iones pesados, reclaman la introducción de un formalismo a temperatura finita y con potencial químico distinto de cero<sup>7,8</sup>).

Con el propósito de esclarecer algunas cuestiones básicas de índole teórica dentro del contexto de una teoría de calibración no-Abeliana a temperatura finita y potencial químico distinto de cero ( $\mu \neq 0$ ) es que nos proponemos el siguiente trabajo.

Partiendo de un modelo particular: Yang-Mills-Higgs (Y-M-H) a temperatura y densidad finita, se discute la necesidad de considerar una carga de fondo externa constante, que neutralice la carga conservada del sistema y garantice el equilibrio estadístico. La consideración de esta carga externa en la Lagrangiana clásica modifica la simetría de calibración original, SU(2), reduciéndola al subgrupo U(1) de éste.

Esta reducción de la simetría fue apuntada ya, para el caso de Yang-Mills puro, por Kiskis<sup>9</sup>). Sin embargo, este autor, al aplicar el formalismo Hamiltoniano, utilizó variables no restringidas, lo que dificulta el paso a la cuantificación, hecho que él mismo subrayó. En nuestro caso se trabajará con todas las variables del espacio de fase y con las ligaduras explícitamente, sean estas tanto de primera como de segunda clase. De este modo el sistema queda preparado para su cuantificación inmediata usando los resultados de Fradkin y colaboradores<sup>10,11</sup>). La reducción de la simetría se reflejará en la cuantificación, no sólo en la modificación del integrando de la integral funcional debido a la presencia de ligaduras de segunda clase sino en el número de condiciones de calibración, el cual se reduce a una sola condición.

Teniendo en cuenta todos estos resultados se calcula la función de partición y el potencial termodinámico en la aproximación de un solo lazo, obteniéndose además el espectro de partículas. El método seguido a lo largo del trabajo se aparta del que aparece en la literatura cuando se consideran sistemas a temperaturas y densidad finita, ya que usualmente la carga externa se introduce para garantizar la neutralidad eléctrica del sistema, pero no se toman en cuenta sus efectos, en cuanto a la cuantificación, debido a la reducción de la simetría. Como se verá el tomar en cuenta los efectos de la carga no es una cuestión trivial ya que de hecho tanto el

número como las expresiones analíticas de los modos propios del sistema se modifican.

### NECESIDAD DE LA INTRODUCCIÓN DE UNA CARGA EXTERNA

Consideremos un sistema de Y-M-H a temperatura y densidad finitas. La función de partición del mismo toma la forma

$$Z = \int \left\{ \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left[ \vec{\pi}^a \cdot \partial_0 \vec{A}^a + p \partial_0 \phi - 1/2 (\vec{\pi}^a \cdot \vec{\pi}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) + p^2/2 + 1/2 (D_i \phi)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + m^2/2 \phi^2 + A_0^a \gamma^a - \mu \delta^{a3} C_{abc} (\vec{A}^b \cdot \vec{\pi}^c + \phi^b p^c) \right] \right\} \quad (1)$$

donde

$$\gamma^a = \vec{\partial} \cdot \vec{\pi}^a - g C_{abc} (\vec{A}^a \cdot \vec{\pi}^c + \phi^b p^c) \quad (2)$$

$$D_\mu^a = \partial_\mu^a - g A_\mu^a \tau^a \quad (3)$$

$\pi_i^a$  y  $p^a$  son los momentos canónicos conjugados de los campos  $A_i^a$  y  $\phi$  respectivamente,  $m$  es la masa de Higgs,  $\lambda$  y  $g$  son las constantes de acoplamiento y  $\mu \delta^{a3}$  es el potencial químico asociado a la tercera componente isotópica de la carga. Se usará la métrica espacio-tiempo  $g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ , y la representación adjunta del álgebra del SU(2), en la cual los generadores del grupo  $\tau^a$  y las constantes de estructura coinciden con el tensor totalmente antisimétrico  $\epsilon_{abc}$ .

La función de partición (1) debe describir el sistema cargado en equilibrio estadístico. De las tres componentes de la carga media conservada

$$\langle N^a \rangle = \left\langle \int C_{abc} (\vec{A}^b \cdot \vec{\pi}^c + \phi^b p^c) \phi^3 x \right\rangle \quad (4)$$

sólo será no nula la tercera,  $\langle N^3 \rangle$ , ya que tiene asociada un potencial químico  $\mu \delta^{a3}$ .

Ahora bien, si se aplica el formalismo Hamiltoniano <sup>12,13)</sup> a la Lagrangiana clásica de Yang-Mills-Higgs se encuentran las siguientes ligaduras de primera clase

$$\pi^{0a} \approx 0 \quad (5-a)$$

$$\gamma^a = \vec{\partial} \cdot \vec{\pi}^a - g C_{abc} (\vec{A}^b \cdot \vec{\pi}^c + \phi^b p^c) \approx 0 \quad (5-b)$$

La versión mecánico-cuántica de (5-b) se reduce a exigir que los estados físicos  $|\psi\rangle$  satisfagan  $\hat{\gamma}^a |\psi\rangle = 0$ , donde  $\hat{\gamma}^a$  es el operador asociado a  $\gamma$  o en términos de la integral funcional, a la presencia de  $\delta(\gamma^a)$  en el integrando de  $Z$  (aquí se considera que  $\pi^{0a}$  fue eliminado en esta etapa junto con  $A_0^a$ , y además fue introducido el multiplicador  $A_0^a$ ). Por lo tanto,

la ligadura (5-b), que no es más que la ley de Gauss para el sistema con simetría interna no-Abeliana, asegura en el problema cuántico la relación requerida entre el flujo eléctrico  $\int \vec{\pi}^a \cdot \vec{n} \, dS$ , y la carga conservada del sistema  $N^a$ , y por supuesto entre los respectivos valores medios,

$$\left\langle \int \vec{\pi}^a \cdot \vec{n} \, dS = g N^a \right\rangle \quad (6)$$

De aquí se tiene que si se interpreta a (1) como la función de partición del sistema con potencial químico  $\mu \delta^{a3}$ , de hecho se está suponiendo la existencia de una carga media no nula  $\langle N^3 \rangle$  y por tanto el flujo eléctrico en esa dirección isotópica no será cero, de manera que el sistema no podrá estar en equilibrio estadístico. Esto es contradictorio ya que como se conoce el formalismo que se está empleando es válido sólo si el sistema se encuentra en equilibrio.

Sin embargo, este problema puede resolverse sin dificultad suponiendo desde el principio la presencia de un fondo de carga externa uniformemente distribuido, cuya densidad  $J_0 \delta^{a3}$  se determinará al exigir que satisfaga la ecuación de campo clásica con potencial químico. Tal carga compensará la carga media del sistema de manera que éste sea neutro y el flujo eléctrico se anule.

Aunque el enfoque dado anteriormente para evidenciar la necesidad de una carga externa neutralizadora no es el usual, no es menos cierto que varios autores (3, 14, 15) coinciden en que esta debe introducirse. No obstante, hasta el momento nadie ha tomado en cuenta los efectos que dicha carga produce en la simetría y cuantificación de sistemas a temperatura y densidad finitas. La próxima sección estará dedicada precisamente a dilucidar tales efectos.

#### FORMALISMO HAMILTONIANO EN PRESENCIA DE CARGA EXTERNA. CUANTIFICACIÓN

Para aclarar los efectos que puede producir la carga externa en el sistema es conveniente partir de la Lagrangiana de Y-M-H clásica con el término adicional de interacción con  $J_0$ .

$$Z = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\nu\mu a} + \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + g A_0^a J_0 \delta^{a3} \quad (7)$$

Si se aplica el formalismo Hamiltoniano de Dirac<sup>12, 13)</sup> se encuentran las siguientes ligaduras en el espacio de fase

$$\pi_0^a \approx 0 \quad (8-a)$$

$$\tilde{\gamma}^a = \vec{\partial} \cdot \vec{\pi}^a - g [C_{abc} (\vec{A} \cdot \vec{\pi}^b + \phi^b p^c) + J_0 \delta^{a3}] \approx 0 \quad (8-b)$$

$$X^a = A_0^{ac} \delta_{c3} \approx 0 \quad (8-c)$$

donde  $A_0^{ac} = C_{abc} A_0^b$ . De estas ligaduras sólo serán de primera clase, y por tanto generadores de transformaciones de calibración:  $\pi_0^3$  y  $\tilde{\gamma}^3$ . Esto implica que el grupo de simetría SU(2) del problema original sin carga externa, se ve reducido al subgrupo U(1) del mismo. Una disminución parcial de la simetría de calibración debido a la presencia de carga externa fue encontrada por Kiskis<sup>9)</sup>, dentro de un contexto diferente, en el modelo de Yang-Mills puro. No obstante, este autor no cuantificó la teoría, pues el uso de variables no restringidas en el Hamiltoniano dificultaron el tratamiento cuántico de una forma covariante.

Nuestro objetivo principal es calcular el potencial termodinámico en la aproximación de un solo lazo para el sistema de Y-M-H con potencial químico. Ahora bien, como vimos, este problema es necesariamente un problema con carga externa, y por lo tanto un procedimiento consistente de obtención de la función de partición que debe contemplar en la cuantificación la reducción de la simetría encontrada a nivel clásico.

Dado que la carga externa da lugar a que aparezcan ligaduras de primera y segunda clase es necesario, por una parte, aplicar el formalismo de Fadkin y colaboradores<sup>10, 11)</sup>, el cual toma en cuenta mediante el formalismo de la integración funcional tanto las ligaduras de primera como de segunda clase, y por otra, imponer menos condiciones de calibración, ya que además de la calibración usual  $A_0^3=0$  que elimina los grados de libertad superfluos:  $\pi_0^3$  y  $A_0^3$ , sólo hay que cancelar la libertad generada por  $\tilde{\gamma}^3$ , y eso se logra con una sola condición  $F=0$  (a diferencia de las tres  $F^a$   $a=1,2,3$ , que se imponen normalmente).

En general el funcional generador de un sistema con ligaduras de primera y segunda clase tomará la forma<sup>10, 11)</sup>

$$Z = \int \left\{ \exp i S \right\} \sqrt{\det\{\psi_m, \psi_n\}} \delta(\theta) [dq] [dp] \quad (9)$$

donde  $\{\psi_m, \psi_n\}$  representa la matriz formada por los corchetes de Poisson entre todas las ligaduras del sistema, así como entre estas y las condiciones de calibración,  $\delta(\theta)$  representa las delta de Dirac funcionales de cada una de las ligaduras y de las condiciones de calibración.

Cuando existen ligaduras de primera y segunda clase el determinante se puede separar en los corchetes de las ligaduras de segunda clase, denotadas genéricamente por  $\eta_\alpha$ , y los corchetes de las ligaduras de primera clase C y las condiciones de calibración  $\omega$

$$\det\{\psi_m, \psi_n\} = \det\{\eta_\alpha, \eta_\beta\} [\det\{c, \omega\}]^2 \quad (10)$$

Como en el caso que nos ocupa existen ambos tipos de ligaduras la función de partición toma la forma

$$Z = \int \{ \exp i S \} \delta(\pi_0^a) \delta(\tilde{\gamma}^a) \delta(x^a) \sqrt{\det\{\eta_\alpha, \eta_\beta\}} \det\{c, \omega\} [dA_\mu] [d\pi_\mu] [d\phi] [dp] \quad (11)$$

donde  $\eta_\alpha = \{\pi_0^1, \pi_0^2, \tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, x^1, x^2\}$ ,  $C = \{\pi_0^3, \tilde{\gamma}^3\}$ ,  $\omega = \{A_0, F\}$

$$y \quad S = \pi_0^a \partial_0 \tilde{A}^a + p \partial_0 \phi - \frac{1}{2} (\pi_0^a \pi_0^a + \tilde{\beta}^a \tilde{\beta}^a) + p^2/2 + \frac{1}{2} (D_1 d)^2 + \quad (12)$$

$$+ \frac{\lambda}{4} \phi^4 + m^2/2 \phi^2 + A_0^a \tilde{\gamma}^a - \mu \delta^{a3} [C_{abc} (\tilde{A}^b \cdot \tilde{\pi}^c + \phi^b p^c) + J_0 \delta^{a3}]$$

es la acción de Y-M-H con potencial químico  $\mu \delta^{a3}$  y carga externa  $J_0 \delta^{a3}$

Nótese que efectivamente sólo se impusieron dos condiciones de calibración, por las razones ya mencionadas.

Si elegimos ahora como calibración

$$F = \partial_\nu A_\nu^3 + \frac{2}{\eta} \phi \tau^3 \xi - f(\vec{x}, t) = 0 \quad (13)$$

donde  $\eta$  es un parámetro que se escogerá convenientemente una vez finalizadas las integrales funcionales,  $\xi$  es la solución para el campo de Higgs de la ecuación clásica y  $f(\vec{x}, t)$  es una función arbitraria auxiliar que se eliminará posteriormente, e integrando funcionalmente en  $\pi_0^a$  y  $A_0^a$ , se obtiene

$$Z = \int \exp \int_0^{-i\beta} d\tau \int d^3 x \left\{ \pi_0^a \partial_0 \tilde{A}^a + p \partial_0 \phi + p^2/2 - \frac{1}{2} (\pi_0^a \pi_0^a + \tilde{\beta}^a \tilde{\beta}^a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (D_1 \phi)^2 - \mu \delta^{a3} [C_{abc} (\tilde{A}^b \cdot \tilde{\pi}^c + \phi^b p^c) + J_0 \delta^{a3}] - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right\} \quad (14)$$

$$\sqrt{\det\{\eta_\alpha, \eta_\beta\}} \det\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) \delta(\tilde{\gamma}^a) \delta(F) [dA_\mu] [d\pi_\mu] [d\phi] [dp].$$

Finalmente elevando  $\delta(\gamma^a)$  en forma de exponencial, e introduciendo el multiplicador de Lagrange  $A_0^a$ , uno puede integrar en los momentos  $\pi_1^a$ ,  $p$ , teniendo presente que ni el determinante de las ligaduras de segunda clase, ni el de los campos fantasmas ( $\det[\partial\omega/\partial\alpha]$ ) dependen de las variables de momento, luego la función de partición toma la forma

$$Z = \int \left[ \exp \left\{ i \int_0^{-i\beta} dt \int d^3 x L_{\text{efec}} \right\} \right] \det\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) \delta(F) [dA_\mu] [d\phi] \quad (15)$$

donde la Lagrangiana efectiva es

$$L_{\text{efec.}} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^a \hat{F}^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^2}{2} \phi^2 - g(A_0^3 + \mu/g) J_0 \quad (16)$$

El símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  significa que en la definición del tensor de intensidad de campo  $F_{\mu\nu}^a$  y de la derivada covariante  $D_\mu$  debe hacerse la sustitución

$$A_0^a \longrightarrow A_0^a + \frac{\mu}{g} \delta^{a3}$$

la cual es típica de los sistemas con densidad finita.

## POTENCIAL TERMODINÁMICO EN LA APROXIMACIÓN DE UN LAZO

El potencial termodinámico se obtiene a partir de la función de partición mediante la relación:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (17)$$

Antes de proseguir es conveniente pasar a variables Euclideas, ya que estas son las más naturales en el formalismo a temperatura finita. Esto se logra mediante la prescripción

$$\begin{aligned} x_0 &\longrightarrow -i x_4, & A_0 &\longrightarrow -i A_4 \\ \mu &\longrightarrow -i \mu, & J_0 &\longrightarrow -i J_4 \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $x_4, A_4, \mu, J_4$  son reales.

La Lagrangiana efectiva en Euclidea toma la forma

$$L_{\text{efec.}}^E = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^a \hat{F}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (\hat{D}_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + g J_4 A_4^3 \quad (19)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g C_{abc} (A_\mu^b + \frac{\mu}{g} \delta_{\mu 4} \delta^{b3}) (A_\nu^c + \frac{\mu}{g} \delta_{\nu 4} \delta^{c3}) \\ \hat{D}_\mu &= \partial_\mu - i g (A_\mu^a + \frac{\mu}{g} \delta_{\mu 4} \delta^{a3}) \tau^a \end{aligned}$$

Para obtener el desarrollo en lazos, el cual es equivalente a un desarrollo en potencias de  $\hbar$  <sup>(16)</sup> es necesario hacer un corrimiento de los campos en la Lagrangiana efectiva alrededor de la solución clásica, o sea

$$\phi \longrightarrow \phi + \xi, \quad A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a + \bar{A}_\mu^a \quad (20)$$

donde

$$\xi = \begin{pmatrix} [(m^2 + \mu^2 \frac{1}{2} \lambda)^{\frac{1}{2}}] \\ [(m^2 + \mu^2 \frac{1}{2} \lambda)^{\frac{1}{2}}] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_\mu^a = 0 \quad (21)$$

son las soluciones de las ecuaciones clásicas

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\xi} = 0, \quad \left. \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right|_{A_\mu^a = \bar{A}_\mu^a} = 0 \quad (22)$$

Los términos de la Lagrangiana efectiva cuadrática en los campos, una vez hecho el corrimiento, darán la contribución de un lazo <sup>6, 17)</sup> al potencial termodinámico.

$$L_0^E = \int d^4x d^4y \left\{ -\frac{1}{2} A_\mu^a \Delta_{\mu\nu}^{-1ab} A_\nu^b - \frac{1}{2} \phi_a D_{ab}^{-1} \phi_b + \phi_b M_{bv}^a A_\nu^a \right\} \quad (23)$$

En la representación de los momentos, estos propagadores inversos vienen dados por

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1ab} = -K_{\lambda}^{ac} K_{\lambda}^{cb} \delta_{\mu\nu} + K_{\mu}^{ac} K_{\nu}^{cb} + g^2 \xi_r \tau_{rs}^a \tau_{st}^b \xi_t \delta_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \eta \delta^{a3b3} \quad (24-a)$$

$$D_{rs}^{-1} = (\lambda \xi^2 - K^2 - m^2) \delta_{rs} + 2\lambda \xi_r \xi_s - 2f_{\mu} K_{\mu} \tau_{rs}^3 + \mu^2 \tau_{rt}^3 \tau_{ts}^3 - \frac{g^2}{\eta} \tau_{rp}^3 \xi_p \xi_q \tau_{qs}^3 \quad (24-b)$$

$$M_{\tau\mu}^a = ig\tau_{rs}^1 \delta^{a1} \xi_s K_\mu + ig\tau_{rs}^2 \delta^{a2} \xi_s K_\mu - g\mu (\tau_{rs}^3 \tau_{st}^a + \tau_{rs}^a \tau_{st}^3) \xi_t \delta_{\mu 4} \quad (24-c)$$

$$K_\lambda^{ac} = i K_\lambda \delta^{ac} - \mu C_{a3c} \delta_{\lambda 4}$$

En ellos se ha tomado en cuenta la condición de calibración (13), la cual se incluyó en la acción mediante el conocido artificio de multiplicar  $Z$  por

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha \int_0^\beta d\tau \int d^3x f^2(\tau, \vec{x}) \right]$$

e integrar funcionalmente en  $[df]$ , lo cual introduce un término extra independiente de  $\beta$  que puede ser absorbido en el factor de normalización<sup>17)</sup>. Se ha elegido además  $\alpha = 1/\eta$ .

Integrando ahora funcionalmente en los campos se obtiene la contribución de un lazo a la función de partición

$$Z^{(1)} = \det \left[ g^2 J_{\mu\nu} \delta^3(k-g) \right] \det \left[ -k^2 + g^2 \xi^2 \right] \det^{-\frac{1}{2}}(D_{cd}^{-1}) \det^{-\frac{1}{2}} \left[ \Delta_{\mu\nu}^{-1ab} - M_{\mu c}^{a*} D_{cd} M_{d\nu}^b \right] \quad (25)$$

donde los dos primeros factores corresponden al determinante de las ligaduras de segunda clase y el de los campos fantasmas respectivamente, y además

$$D_{cd} = \frac{1}{D} \left[ K^2 \tau_{ce}^3 \tau_{ed}^3 + 2i\mu K_{\mu} \tau_{cd}^3 - 2\lambda \tau_{ce}^3 \xi_e \xi_f \tau_{fd}^3 + \frac{g^2}{\eta} \xi_c \xi_d + \frac{D \delta c^3 \delta d^3}{\mu^2 - k^2} \right] \quad (26)$$

$$D = \frac{\det D_{cd}^{-1}}{\mu^2 - k^2} = \left\{ \left[ m^2 + \mu^2 - k^2 + \frac{g^2}{2\eta} \xi^2 \right]^2 - \left[ 4\mu^2 K_4^2 + \left( \lambda - \frac{g^2}{2\eta} \right)^2 \xi^4 \right] \right\} \quad (27)$$

Nótese que los determinantes son sobre todos los índices, tanto algébricos como funcionales.

Sustituyendo (25) en (17) obtenemos el potencial termodinámico en un lazo

$$\Omega^{(1)} = -\frac{1}{\beta} \int_{k_4} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left\{ \det^{-\frac{1}{2}}(D_{ab}^{-1}) \det^{-\frac{1}{2}} \left[ \Delta_{\mu\nu}^{-1ab} - N_{\mu\nu}^{ab} \right] \det(g^2 J_{\mu\nu} \delta^3(x-g)) \det(-k^2 + g^2 \xi^2) \right\} \quad (28)$$

$$N_{\mu\nu}^{ab} = M_{\mu c}^{a*} D_{cd} M_{d\nu}^b \quad (29)$$

Para obtener el espectro de partículas del sistema (relación de dispersión de los modos físicos) es necesario resolver los determinantes que aparecen en (28). Estos se resuelven en productos de polinomios en  $k_4$ , de manera que se puede escribir el potencial en la forma



$$\Omega^{(1)} = -1/2\beta \sum_{\mathbf{k}_4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{10} \ln(k_4^2 + \omega_i^2) \quad (30)$$

El número de modos que se obtiene es igual a 10, lo que se corresponde con el número de grados de libertad del sistema con carga externa.

Los modos obtenidos son:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} k_3^2 - g^2 \frac{\xi^2}{2} \pm \frac{1}{2} [k_3^4 - 2g^2 \xi^2 k_3^2 + g^2 \xi^2 (\delta\mu^2 + g^2 \xi^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (31-a)$$

$$\omega_{3,4}^2 = k_3^2 - 2\mu^2 - \frac{1}{2} (2\lambda + g^2) \xi^2 \pm \frac{1}{2} [4\mu^2 + (2\lambda - g^2) \xi^2]^2 - 16\mu^2 k_3^2]^{\frac{1}{2}} \quad (31-b)$$

$$\omega_{5,6}^2 = k_3^2 - \mu^2 - g^2 \frac{\xi^2}{2} \pm \frac{1}{2} [g^4 \xi^4 - 16\mu^2 k_3^2]^{\frac{1}{2}} \quad (31-c)$$

$$\omega_7^2 = k_3^2 - g^2 \xi^2 \quad (31-d)$$

Las frecuencias  $\omega_5$ ,  $\omega_6$  y  $\omega_7$  son doblemente degeneradas. Al igual que en la Electrodinámica Escalar con densidad finita<sup>15, 18)</sup> los modos característicos del problema dependen del potencial químico  $\mu$  que caracteriza el sistema de muchos cuerpos. Estas frecuencias difieren en número y forma de las que se obtienen sin tomar en cuenta la carga externa en la cuantificación del problema.

Para hacer la suma en  $k_4$  de la expresión (30) es conveniente utilizar el método de Fradkin<sup>3)</sup>. Entonces el potencial termodinámico puede escribirse como la suma de un término dependiente de la temperatura  $\Omega_\beta^{(1)}$  y otro término de vacío  $\Omega_0^{(1)}$

$$\Omega^{(1)} = \Omega_0^{(1)} + \Omega_\beta^{(1)} \quad (32)$$

$$\Omega_0^{(1)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{10} \frac{\omega_i}{2} \quad (33)$$

$$\Omega_\beta^{(1)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_i \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_i}) \quad (34)$$

## RENORMALIZACIÓN DEL TÉRMINO DE VACÍO

El límite de temperatura cero del potencial termodinámico en la aproximación de un lazo da lugar a expresiones divergentes las cuales deben sustraerse por el procedimiento de renormalización usual, es decir mediante la introducción de los contratérminos apropiados en la Lagrangiana del sistema.

Si se usa la fórmula

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \ln(k^2 + \omega^2) = \frac{\omega}{2} \quad (35)$$

el límite de temperatura cero de  $\Omega^{(1)}$  podrá escribirse en la forma

$$\Omega_0^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^{10} \ln(k^2 + \omega_i^2) \quad (36)$$

Si se aplica la técnica de regularización dimensional <sup>19)</sup> para separar la parte finita de  $\Omega_0^{(1)}$  se obtiene

$$\Omega_0^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon} \left\{ \left(12 + \frac{13}{2} \frac{g^2}{\lambda} + \frac{9}{4} \frac{g^4}{\lambda^2}\right) \mu^4 + \left(\frac{9}{4} \frac{g^4}{\lambda^2} + \frac{g^2}{\lambda} + 1\right) m^4 + \right. \\ \left. + \left(6 + \frac{15}{2} \frac{g^2}{\lambda} + \frac{9}{2} \frac{g^4}{\lambda^2}\right) m^2 \mu^2 \right\} + \text{términos finitos} \quad (37)$$

donde los términos finitos vienen dados por

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^3} \left\{ 2\pi k^2 \left[ \left[ \frac{k^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{2} - g^2 \frac{\xi^2}{2}\right)^2 + b_1} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{k^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{2} - g^2 \frac{\xi^2}{2}\right)^2 + b_1} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \right. \\ \left. - \left[ \frac{k^2}{2} - a_1 + \sqrt{\left(\frac{k^2}{2} - g^2 \frac{\xi^2}{2}\right)^2 + b_1} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{k^2}{2} - a_1 - \sqrt{\left(\frac{k^2}{2} - g^2 \frac{\xi^2}{2}\right)^2 + b_1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} - \\ - \frac{\pi}{3} \left\{ \left[ k^2 - g^2 \frac{\xi^2}{2} \right]^{\frac{3}{2}} - \left[ k^2 - g^2 \frac{\xi^2}{2} - a_1 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} + \\ + \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \left\{ \left[ k^2 + \sqrt{b_2 - 4\mu^2 k^2 - a_2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ k^2 - a_2 - \sqrt{b_2 - 4\mu^2 k^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left[ k^2 + \sqrt{b_2 - 4\mu^2 k^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ k^2 - \sqrt{b_2 - 4\mu^2 k^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{k^2 - a_2} + 2k \right\} + \\ + \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^3} 8\pi k^2 \left\{ \left[ k^2 + \sqrt{b_3 - 4\mu^2 k^2 - a_3} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ k^2 - \sqrt{b_3 - 4\mu^2 k^2 - a_3} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left[ k^2 + \sqrt{b_3 - 4\mu^2 k^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ k^2 - \sqrt{b_3 - 4\mu^2 k^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{k^2 - a_3} + 2k \right\}$$

y los coeficientes  $a_i, b_i$  toman la forma

$$a_1 = \mu^2 + g^2 \xi^2, \quad b_1 = 2\mu^2 g^2 \xi^2 \quad (39-a)$$

$$a_2 = 2\mu^2 + \left(\lambda + \frac{g^2}{2}\right) \xi^2, \quad b_2 = [2\mu^2 + (\lambda - g^2/2) \xi^2]^2 \quad (39-b)$$

$$a_3 = \mu^2 + g^2 \frac{\xi^2}{2}, \quad b_3 = g^4 \frac{\xi^4}{4} \quad (39-c)$$

La parte divergente de  $\Omega_0^{(1)}$  (los términos dependientes del parámetro pequeño  $\epsilon$ , el cual se hace tender a cero) se elimina gracias a los contra-términos que se agregan a la Lagrangiana del problema y que aparecen en la aproximación de árbol para  $\Omega$ . De manera que eligiendo convenientemente las condiciones de renormalización se obtiene que la parte de vacío del potencial termodinámico hasta la aproximación de un lazo será

$$\Omega_0 = \Omega_0^{(0)} + \Omega_0^{(1)} = -3/4\lambda\mu^4 - m^2/2\lambda\mu^2 + 1/4\lambda m^4 + \dots \quad (40)$$

+ términos finitos dados en (38) .

## CONCLUSIONES

---

En este trabajo se calculó el potencial termodinámico de un sistema de campos de Yang-Mills en interacción con bosones de Higgs y potencial químico diferente de cero asociado a la tercera componente isotópica de la carga conservada, por un método que se aparta del convencional. Este se basó esencialmente en la consideración de la carga externa como elemento activo en la cuantificación del problema.

Dicha carga externa reduce la simetría original del sistema de campos de Y-M-H, y da lugar a un nuevo conjunto de ligaduras entre las cuales aparecen algunas de segunda clase. Estos efectos se reflejan tanto en el procedimiento de cuantificación, como en el número de condiciones extras que hay que imponer en la integral funcional, y claro está dan lugar a modificaciones en los resultados físicos, como es en específico la aparición de un mayor número de modos de propagación independientes (en lugar de nueve como se obtiene convencionalmente aquí, aparecen 10).

Los resultados teóricos de este trabajo tienen interés para la investigación del comportamiento de sistemas unificados de campos a temperatura y densidad finita. Su aplicación al sistema de campos electro-débiles unificados de Weinberg-Salam una tarea inmediata de los autores.

## BIBLIOGRAFÍA

---

1. Feynman, R.P.  
Phys. Rev. 91 (1953) 1291.
2. Matsubara, T.  
Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351.
3. Fradkin, E.S.  
Quantum Field Theory and Hydrodynamics. Consultant Bureau (1967)  
New York.
4. Kirshnits, D.A.; A.D.Linde  
Ann. Phys. 101 (1976) 195.
5. Weinberg, S.  
Phys. Rev. D9 (1974) 3357.
6. Dolan, L.; R.Jackiw  
Phys. Rev. D9 (1974) 3320.

7. Van Hove, L.  
in Quark matter formation and heavy ion collisions, eds. M.Jacob  
and H.Satz (Bielefeld (1982)).
8. Shafi, Q.  
in Proc. Inter. Conf. on High energy Physics (Lisbon 1981) ed.  
J. Dios de Deus.
9. Kiskis, J.  
Phys. Rev. D21 (1980) 1074.
10. Fradkin, E.S., G.A.Vilkovisky  
CERN report No TH-2332 (1977).
11. Fradkin, E.S.; T.E.Fradkina  
Phys. Lett. 72B (1978) 343.
12. Dirac, P.A.M.  
Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University, New York, (1964).
13. Hanson, A.; T.Regge and C.Teitelboim  
Constrained Hamiltonian Systems, Accademia Nazionale dei Linceis.  
Roma, 1976.
14. Pérez Rojas, H.; A.E.Shabad  
Ann. Phys. 121 (1979) 432.
15. Kapusta, J.I.  
Phys. Rev. D24 (1981) 426.
16. Jackiw, R.  
Phys. Rev. D9 (1974) 1686.
17. Bernard, G.W.  
Phys. Rev. D9 (1974) 3312.
18. González, A.  
Grupo de Física Teórica. Preprint No.2 (1983).
19. Leibbrandt, G.  
Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 849.