REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. IV, No. 3, 1984

# Sobre una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible

José M. Marín Antuña, Dpto. de Física Teórica, Universidad de La Habana

RESUMEN

Para el estudio de los procesos de excitación, propagación y difracción de ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible se deduce la ecuación de dichas ondas y se obtiene la solución fundamental de esta ecuación. Se hacen comparaciones con resultados tridimensionales obtenidos por otros autores que sirven para fundamentar los resultados obtenidos. Con el fin de ilustrar la aplicación de la teoría desarrollada, se investiga el proceso de difracción de una onda plana tipo escalón que se propaga en la dirección del eje de rotación del líquido sobre una barrera semiinfinita vertical bajo un ángulo de incidencia de la onda igual a cero.

ABSTRACT

To study the excitation, propagation and difraction of bidimensional waves in a giratory and compressible liquid is obtained the equation of these waves and the fundamental solution of this equation. Comparations are made with tridimensional results obtained by other authors which serve like a fundamentation of the obtained results. In the sense of illustration of the application of the theory, the difraction process of a plane wave is investigated when the wave is propagating in the direction of the rotation axis of the liquid and the wave falls on a half-infinite wall with an angle equal zero.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad en relación con las necesidades de la práctica es cada vez mayor el interés por el estudio de las propiedades dinámicas de líquidos de diversa naturaleza, en particular de los líquidos giratorios. Soboliev [1] comenzó el estudio sistemático de la dinámica de los líquidos giratorios y Masliennikova [2] lo continuó al igual que otros autores [3-6].

El presente trabajo está dedicado al estudio de algunos problemas relacionados con la propagación y difracción de ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible. Se obtiene, además, la ecuación básica de la dinámica de dichas ondas, se analiza su solución fundamental y se estudia un problema de difracción en un semiplano sumergido en dicho líquido.

## 1. ECUACIÓN DE LAS ONDAS BIDIMENSIONALES

Consideremos un líquido ideal compresible. Supondremos que este líquido es homogéneo y que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular $w/2$. Coloquemos un sistema de coordenadas $(x, y, z)$ que gira junto con el líquido de forma tal que el eje $Oz$ coindica con el eje alrededor del cual gira el líquido.

Las oscilaciones pequeñas del líquido se describen por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{w}.\vec{v} + \vec{\nabla} p = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \qquad (1.1)$$

En el sistema de ecuaciones (1.1) hemos considerado que la densidad del líquido es igual a la unidad y hemos utilizado la siguiente notación: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector de la velocidad de las partículas del líquido; $p$ es la presión dinámica del líquido; $c$ es un parámetro numérico correspondiente a la velocidad del sonido en el líquido, $\vec{w} = (o, o, w)$ es el vector de Coriolis.

*Definición*. Por movimiento bidimensional del líquido giratorio compresible entenderemos aquel para el cual las magnitudes $\vec{v}$ y $p$ son independientes de de una de las variables espaciales $x$ ó $y$. Para fijar ideas supondremos que son independientes de la variable $y$, es decir

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Consideraciones físicas y geométricas nos permiten concluir que tales movimientos son sólo posibles en regiones que tengan la forma de cilindros infinitos con generatrices paralelas al eje $Oy$. El sistema de ecuaciones (1.1) para el caso de movimientos bidimensionales puede ser escrito como sigue:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - w v_y + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (1.2a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + w v_x = 0 \tag{1.2b}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1.2c}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.2d}$$

De (1.2b) se desprende que la componente $V_y$ del vector de velocidad se determina unívocamente a través de $v_x$ y de las condiciones iniciales y puede ser excluida de (1.2a), la cual toma entonces la forma:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + w^2 v_x + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = 0 \tag{1.2a'}$$

Derivando tres veces respecto a t la ecuación (1.2d) y utilizando (1.2a') y (1.2c), no es difícil obtener:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_2^2 p - w^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial t} = 0 \tag{1.3}$$

donde por $\nabla_2^2$ aquí y en lo adelante se entiende el laplaciano respecto a las variables x, z. Además, de (1.2d) y (1.2c) se deduce que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial z} \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{d t^2} + \frac{\partial^2 p}{d z^2}$$

Por consiguiente (1.3) puede ser escrita finalmente en la forma:

$$L[p] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla_2^2 p + \frac{w^2}{c^2} p\right] - w^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{1.4}$$

Así pues, la presión dinámica p satisface la ecuación (1.4) que llamaremos ecuación de las ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible. Es posible demostrar que las componentes $v_k$ , k = 1,2,3 del vector $\vec{v}$ satisfacen también la ecuación, es decir, $L[v_k] = 0$. De esta manera la integración del sistema (1.2) ha sido reducida a la integración de la ecuación (1.4). Es conveniente señalar que en el caso tridimensional fue obtenida una ecuación tridimensional análoga por Masliennikova [2]. Para obtener la expresión de la ecuación tridimensional, basta sustituir en (1.4) $\nabla_2^2$ por $\nabla_3^2$ (el laplaciano respecto a las variables x,y,z). Más adelante utilizaremos uno de los resultados de las investigaciones de la citada autora.

## 2. SOLUCIÓN FUNDAMENTAL Y MÉTODO DEL DESCENSO

Investiguemos el problema relacionado con la solución fundamental de la ecuación (1.4), es decir, busquemos la solución $\varepsilon_2(x,z,t)$ de la ecuación:

$$L\{\varepsilon_2\} = \delta(x)\delta(z)\delta(t) \tag{2.1}$$

donde $\delta$ es la conocida función delta de Dirac

Describamos el esquema formal de la construcción de la solución fundamental. Apliquemos a (2.1) la transformada de Laplace respecto a la variable t. Como resultado obtenemos:

$$p^2\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + (p^2+w^2)\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}p^2(p^2+w^2)E_2 = -\delta(x)\delta(z) \tag{2.2}$$

donde por $E_2$ entendemos la transformada de Laplace de la función $\varepsilon_2$ ($E_2 \doteq \varepsilon_2$). Haciendo el cambio de variables:

$$\bar{x} = \sqrt{p^2+w^2}\; x \;, \quad \bar{z} = pz$$

y teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, de (2.2) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{1}{c^2}E_2 = -p\sqrt{p^2+w^2}\;\delta(\bar{x})\delta(\bar{z}) \tag{2.3}$$

La solución generalizada de la ecuación (2.3) que decrece para $r = \sqrt{\bar{x}^2+\bar{z}^2} \to \infty$ en el caso de $\mathrm{Re}\,p > 0$ es conocida y tiene la forma:

$$E_2(\bar{x},\bar{z},p) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{p^2+w^2}}\,K_0\left(\frac{1}{c}\sqrt{\bar{x}^2+\bar{z}^2}\right)$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación (2.2) es:

$$E_2(x,z,p) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{p^2+w^2}}\,K_0\left(\frac{1}{c}\sqrt{(p^2+w^2)x^2+p^2z^2}\right) \tag{2.4}$$

donde $K_0(z)$ es la función cilíndrica de Mc. Donald. Teniendo en cuenta las siguientes fórmulas de transformadas de Laplace [7]:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+w^2}} \doteqdot J_0(wt)$$

$$K_0\left(b\sqrt{p^2+\beta^2}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\frac{\Theta(t-b)}{(t^2-b^2)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\beta}\;J_{-\frac{1}{2}}\left(\beta\sqrt{t^2-b^2}\right) =$$

$$= \frac{\Theta(t-b)}{\sqrt{t^2-b^2}}\cos\left(\beta\sqrt{t^2-b^2}\right)$$

($b>0$, $J_\nu(z)$ aquí y en lo adelante es la función de Bessel y $\Theta(t)$ la función paso unitario de Heaviside), obtenemos sobre la base de la fórmula (2.4) la siguiente expresión para la solución fundamental:

$$\varepsilon_2(x,z,t) = \beta(t) * W(x,z,t) \tag{2.5}$$

donde * simboliza la convolución respecto al tiempo y las funciones $\beta(t)$ y $W(x,z,t)$ se determinan por las fórmulas:

$$\beta(t) = \int_0^t J_0(w\tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

$$W(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Theta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}}\cos\left(w\frac{x}{r}\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2+z^2}$$

Analicemos brevemente la solución fundamental obtenida. En primer lugar debemos destacar que la función $W(x,z,t)$ que figura en la fórmula (2.5) es además de la solución fundamental, la solución singular generalizada de la ecuación (1.4). Este hecho lo utilizaremos de forma sustancial posteriormente. Por otro lado, es fácil ver que para $w = 0$ la función $W(x,z,t)$ coincide con la solución fundamental de la ecuación de onda bidimensional y se cumple que

$$\left.\frac{\partial^2 \varepsilon_2(x,z,t)}{\partial t^2}\right|_{w=0} = W(x,z,t)\Big|_{w=0} = \frac{\Theta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}},$$

lo que está en plena concordancia con el hecho de que para $w=0$ el operador $L$ en la ecuación (1.4) adopta la forma $L = \Box\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, donde $\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_2^2$ es el operador de D'Alembert.

El procedimiento formal de construcción de la función $\varepsilon_2(x,z,t)$ presentado arriba puede ser fácilmente fundamentado como veremos a continuación. Para ellos veamos la interrelación entre la solución fundamental $\varepsilon_2(x,z,t)$ de la ecuación (1.4) con la solución análoga para el caso tridimensional de la ecuación (1.4) que, como se dijo anteriormente, fue obtenida en los trabajos de Másliennikova.

La solución fundamental para el análogo tridimensional de la ecuación (1.4) tiene la siguiente forma:

$$\varepsilon(x,y,z,t) = \frac{\Theta\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi w r}\int_0^{\zeta}\frac{\mu J_0(\mu)\,d\mu}{\sqrt{\mu^2+\frac{w^2r^2}{c^2}}} \tag{2.7}$$

donde:

$$\zeta = \frac{wr}{R}\sqrt{t^2-\frac{R^2}{c^2}}, \quad r^2 = x^2+y^2, \quad R^2 = r^2+z^2$$

Además, se cumple que

$$\frac{\partial \varepsilon_3(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\Theta\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R} J_0\left(\frac{wr}{R}\sqrt{t^2-\frac{R^2}{c^2}}\right)$$

Mostremos que las soluciones fundamentales $\varepsilon_2(x,z,t)$ y $\varepsilon_3(x,y,z,t)$ están estrechamente interrelacionadas; en otras palabras, mostremos que la solución $\varepsilon_2$ puede obtenerse a partir de la solución $\varepsilon_3$ por medio del método de descenso de Hadamard [8] respecto a la variable y. Para convencerse de ello es suficiente comprobar la validez de la igualdad

$$\varepsilon_2(x,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_3(x,y,z,t)\,dy \tag{2.8}$$

Apliquemos a la igualdad (2.8) la transformada de Laplace respecto a la variable t y tengamos en cuenta la siguiente fórmula [7]:

$$\Theta(t-b)J_0\left(a\sqrt{t^2-b^2}\right) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\, e^{-b\sqrt{p^2+a^2}}, \quad b \geq 0 \tag{2.9}$$

Como resultado obtenemos

$$E_2(x,z,p) = \frac{1}{2\pi p}\int_0^{\infty} \frac{1}{R}\,\frac{e^{-\frac{R}{c}\sqrt{p^2+\frac{w^2r^2}{R^2}}}}{\sqrt{p^2+\frac{w^2r^2}{R^2}}}\,dy =$$

(2.10)

$$= \frac{1}{2\pi p\sqrt{p^2+w^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{c}\sqrt{p^2+w^2}\,\gamma(\xi,p)}\,\frac{d\xi}{\gamma(\xi,p)}$$

donde:

$$\gamma(\xi,p) = \sqrt{\xi^2+a^2}, \qquad a^2 = \frac{(p^2+w^2)x^2+p^2z^2}{p^2+w^2}$$

Teniendo en cuenta la conocida fórmula [7]:

$$K_0(ab) = \int_0^{\infty} e^{-b\sqrt{\xi^2+a^2}}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+a^2}}$$

de (2.10) obtenemos la relación (2.4), la cual fundamenta la validez de la igualdad (2.8).

## 3. DIFRACCIÓN EN UN SEMIPLANO VERTICAL DE UNA ONDA PLANA QUE SE PROPAGA EN LA DIRECCIÓN DEL EJE DE ROTACIÓN DEL LÍQUIDO

Un caso sencillo e ilustrativo de la aplicación de la ecuación de las ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible lo constituye el estudio del proceso de difracción de una onda plana que se propaga en la dirección del eje de rotación del líquido en una barrera vertical sumergida en dicho líquido.

Al investigar los procesos no estacionarios de propagación de ondas, por onda plana comúnmente se entiende una onda viajera de tipo escalón, que se describe por medio de la función de Heaviside $\Theta$. En el presente epígrafe expondremos los resultados de las investigaciones sobre la difracción de una onda plana del tipo $u_0 = \Theta(t-z)$ que incide bajo un ángulo cero sobre la pared vertical $\Gamma \equiv \{(x,z) \in R^2 : x=0,\ z \geqslant 0\}$ sumergida en un líquido giratorio y compresible que ocupa todo el espacio $R^2$.

Si por $U$ representamos el campo ondulatorio completo y escribimos $U(x,z,t) = \Theta(t-z) + u(x,z,t)$, entonces para la función $u(x,z,t)$ que describe el campo difractado obtenemos el siguiente problema de frontera:

$$
\begin{gathered}
L_1[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + w^2 u\right] - w^2 u_{zz} = 0 \\
\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t \leq 0} = 0, \qquad k = 0,1,2,3 \\
\left. u(x,z,t) \right|_{(x,z)\in\Gamma} = -\Theta(t-z)
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Aquí y en lo adelante para simplificar las fórmulas consideramos que $c=1$. En el problema planteado las funciones $U$ y $u$ por su sentido físico describen la componente horizontal $v_x$ del vector de la velocidad de las partículas del líquido.

Buscaremos la solución*) del problema (3.1) en la forma siguiente:

$$
u(x,z,t) = \int_0^t\int_0^\infty \mu(s,t-\tau) W(x,z-s,\tau)\, ds\, d\tau \tag{3.2}
$$

En la solución propuesta (3.2) la función $W$ es la misma solución singular de la fórmula (2.6); la función $\mu$ es por el momento desconocida. De esta manera la ecuación y las condiciones iniciales del problema (3.1) quedan satisfechas. Para satisfacer la condición de frontera del problema hacemos $x \to 0$ y de (3.2) obtenemos:

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty \mu(s,t-\tau)\frac{\Theta(\tau-|z-s|)}{\sqrt{\tau^2-|z-s|^2}}\, ds\, d\tau = -\Theta(t-z) \quad (z>0) \tag{3.3}
$$

*) Aquí y en lo adelante por solución del problema se entiende la función $u(x,z,t)$ que satisface la ecuación $L_1[u]=0$ en el sentido de la teoría de funciones generalizadas y las condiciones iniciales y de frontera, como regla, en el sentido clásico.

que es una ecuación integral de Fredholm de primera especie para la función $\mu$. Consideraremos que la función incógnita $\mu(s,t)$ y su transformada de Laplace $M(s,p)$ satisfacen en el entorno del punto $s=0$ las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} |\mu(s,t)| &\le \frac{c(t)}{\sqrt{s}} \quad \forall \ t > 0 \\ |M(s,p)| &\le \frac{c(p)}{\sqrt{s}} \quad \forall \ \mathrm{Re}\,p > 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para hallar la solución de la ecuación (3.3) apliquémosle la transformada de Laplace teniendo en cuenta el teorema de la convolución. Entonces, teniendo en cuenta que [7]:

$$\frac{\Theta(t-a)}{\sqrt{t^2-a^2}} \doteqdot K_0(ap)$$

y que además

$$\Theta(t-z) \doteqdot \frac{e^{-pz}}{p}$$

obtenemos de (3.3):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K_0(p|z-s|)M(s,p)\,ds = -\frac{e^{-pz}}{p} \tag{3.5}$$

La ecuación (3.5) para cada $p$ tal que $\mathrm{Re}\,p>0$ es una ecuación integral de Winer-Hopf [9] de primera especie en el semieje $z>0$. Los métodos de solución de este tipo de ecuación en la actualidad están bien elaborados [9-11] por lo que los aplicaremos directamente. Llamemos:

$$f_+(z) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-pz}}{p} & \forall \ z>0 \\ 0 & \forall \ z<0 \end{cases}, \quad f_-(z) = \begin{cases} 0 & \forall \ z>0 \\ e(z) & \forall \ z<0 \end{cases}$$

donde $e(z)$ es cierta función. Entonces la ecuación (3.5) toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K_0(p|z-s|)M(s,p)\,ds = f_+(z) + f_-(z) \tag{3.6}$$

Para la función $f_+(z)$ tenemos que:

$$|f_+(z)| \le M\, e^{\tau_- z}$$

con $M \ge \frac{1}{|p|}$, $\tau_- = -\mathrm{Re}\,p$

Supondremos, por otro lado que $|e(z)| < B$. Entonces, llamando $F_+(k)$ a la transformada unilateral de Fourier de la función $f_+(z)$ y $E_-(k)$ a la transformada de $f_-(z)$, obtenemos de (3.6):

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} K_0^{(F)}(k) M_+^{(F)}(k,p) = F_+(k) + E_-(k)$$

donde hemos llamado $M_+^{(F)}(k,p)$ a la transformada unilateral de Fourier de $M(s,p)$ y

$$K_0^{(F)}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{p^2+k^2}}$$

es la transformada de Fourier de la función de Mc. Donald. Además, no es difícil obtener que

$$F_+(k) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p(k+ip)} \quad \forall \ \mathrm{Im}k > -\mathrm{Re}p.$$

Así pues, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{p^2+k^2}} M_+^{(F)}(k,p) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{p(k+ip)} + E_-(k) \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta que $p^2+k^2 = (k+ip)(k-ip)$ procedamos a la factorización. Como es evidente que

$$\frac{\sqrt{k-ip}}{p(k+ip)} \equiv \frac{1}{p} \frac{\sqrt{-2ip}}{k+ip} + \frac{1}{p} \left\{ \frac{\sqrt{k-ip} - \sqrt{-2ip}}{k+ip} \right\} .$$

obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k+ip}} M_+^{(F)}(k,p) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p} \frac{\sqrt{-2ip}}{k+ip} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p} \left\{ \frac{\sqrt{k-ip} - \sqrt{-2ip}}{k+ip} \right\} + \sqrt{k-ip}\, E_-(k) \tag{3.8}$$

Llamemos:

$\Pi_+$ al conjunto de funciones analíticas y univaluadas en $\mathrm{Im}k > -\mathrm{Re}p$

$\Pi_-$ al conjunto de funciones analíticas y univaluadas en $\mathrm{Im}k < \mathrm{Re}p$

Entonces es evidente que la parte izquierda de (3.8) pertenece a $\Pi_+$ y la parte derecha a $\Pi_-$. Además, las cuatro funciones que figuran en (3.8) tienden a cero como $|k|^{-1}$ para $|k| \to \infty$. Por consiguiente, por el método general de Winer-Hopf, existe una función entera única $P(k)$ tal que

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k+ip}} M_+^{(F)}(k,p) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p} \frac{\sqrt{-2ip}}{k+ip} = P(k) = 0 \tag{3.9}$$

En la extrema derecha de (3.9) hemos igualado a cero en virtud del teorema de Liouville para las funciones enteras.

Así pues, para la transformada de Fourier $M_+^{(F)}(k,p)$ obtenemos la expresión:

$$M_+^{(F)}(k,p) = \frac{2i\sqrt{-i}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{k+ip}} \tag{3.10}$$

De (3.10) calculando la transformada inversa de Fourier y después la transformada inversa de Laplace por la fórmula de Mellin, obtenemos finalmente para la función $\mu(s,t)$ la expresión:

$$\mu(s,t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\Theta(t-s)}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} \qquad (3.11)$$

Colocando (3.11) en la fórmula (3.2), obtenemos la solución del problema (3.1) que describe la difracción de la onda $u_0$ en la pared $\Gamma$ bajo un ángulo cero de incidencia. La expresión final de la solución del problema (3.1) será:

$$u(x,z,t) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\int_0^t\int_0^\infty \frac{\Theta(t-\tau-s)}{\sqrt{s}\sqrt{t-\tau-s}}\frac{\Theta(\tau-r_s)}{\sqrt{\tau^2-r_s^2}}\cos\left(w\frac{x}{r_s}\sqrt{\tau^2-r_s^2}\right)ds\,d\tau \qquad (3.12)$$

donde $r_s^2 = x^2 + (z-s)^2$

Un análisis de las fórmulas obtenidas nos permite establecer las propiedades principales del cuadro ondulatorio formado como resultado de la difracción. El campo resultante $U$ se compone de la onda incidente $u_0 = \Theta(t-z)$ y del campo difractado u, el cual resulta diferente de cero sólo dentro del círculo $r \leq t$. Además, como es fácil apreciar, la función $u(x,z,t)$ es par respecto a la variable x y por lo tanto el campo ondulatorio que se forma como resultado de la difracción resulta simétrico con respecto al eje de coordenadas z, o lo que es lo mismo, respecto a la pared $\Gamma$.

Con el objetivo de obtener una representación clara de la etapa inicial del proceso de difracción estudiado, observemos que, en virtud de la propia definición de la función $\Theta(z)$, el área de integración de (3.2) será en un plano $(s,\tau)$, el dominio rayado de la figura 1. Teniendo en consideración este hecho, se realizó la integración numérica de la fórmula (3.12), cuyos resultados se muestran en la figura 2. En este dibujo se representan las líneas de nivel del campo ondulatorio total $U(x,z,t)$ para los valores de los parámetros c=1, w=1 y para momentos de tiempo t = 2,4,6,8.

En el análisis de los dibujos de la figura 2 debe tenerse en cuenta la diferencia en las escalas de representación del cuadro de difracción para los diferentes momentos de tiempo.

Como conclusión señalemos que las investigaciones arriba expuestas son, de acuerdo con nuestro conocimiento, el primer intento de estudiar problemas de difracción en un líquido giratorio compresible y resultan de gran interés tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista físico.

El autor quiere agradecer al Doctor en Ciencias S.A. Gabov su apoyo en el trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA


1. Sóboliev, S.L.
   Sobre un nuevo problema de la física matemática. Izv. A.N. SSSR. serie matem., 1954, tom. 18, No. 1,3-50.
2. Másliennikova, V.N.
   Problemas matemáticos de la hidrodinámica de un líquido giratorio y sistemas de Sóboliev, S.L. Trabajo referativo para la disertación de doctor en ciencias físico-matemáticas. Novosobirsk, 1971, 1-28.
3. Aleksandrián, R.A.
   Propiedades espectrales de operadores generados por sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo de Sóboliev, S.L. Mosk. Matem. Obsh., 1960, No. 9, 455-505.
4. Kopachevski, N.D.
   Pequeños movimientos y oscilaciones propias de un líquido ideal giratorio. Jarkov, 1978 (separata/fis. tej. inst. niskij temperatur A.N. URSS: No. 38-71).
5. Zeleniak, T.I.; B.V. Kapitonov; M.V. Fokin
   Sobre un problema de Sóboliev S.L. en la teoría de oscilaciones pequeñas de un líquido giratorio. Novosibirsk, 1983, (separata/ Vichis. centr SO AN SSSR: No. 471).
6. Gabov, S.A.
   Espectro y bases de autofunciones de un problema sobre oscilaciones acústicas en un líquido giratorio. Dokl. AN SSSR, 1980. T. 254, No. 4,777-779.
7. Bateman, H.; A. Erdélyi
   Tablas de transformadas integrales. Serie SMB, T.1-M: Nauka, 1969.
8. Hadamard, J.
   Problema de Cauchy para ecuaciones lineales en derivadas parciales de tipo hiperbólico. M.: Nauka, 1981.
9. Winer, N.; R. Peli
   Transformada de Fourier en el campo complejo. M.: Nauka, 1964.
10. Noble, B.
    El Método de Winer-Hopf. M.: IL,1962.
11. Gajov, F.D.; Yu. I. Cherskiy
    Ecuaciones tipo convolución. M.: Nauka, 1978.


Recibido: 7 de septiembre de 1984.

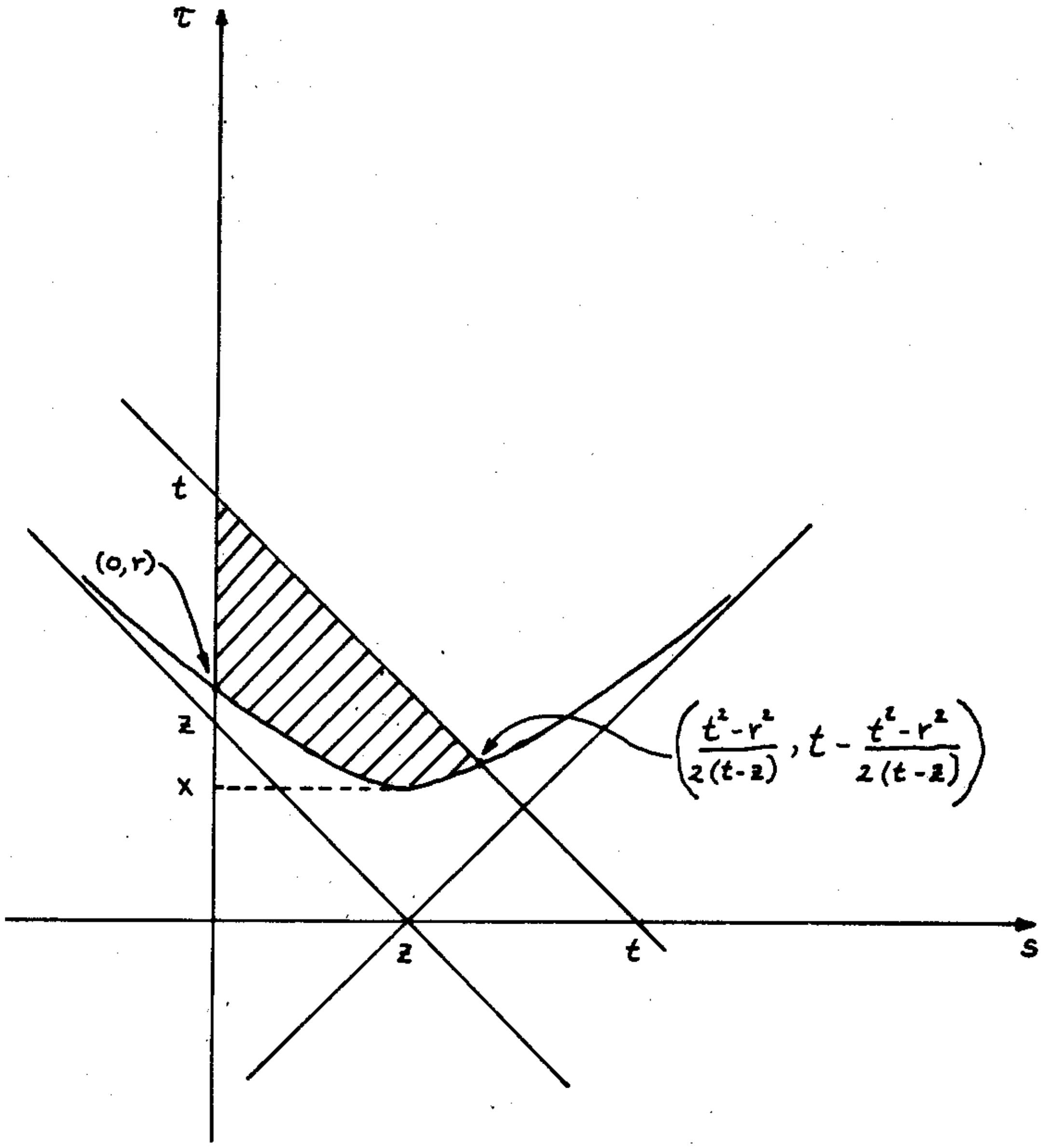


Figura 1.

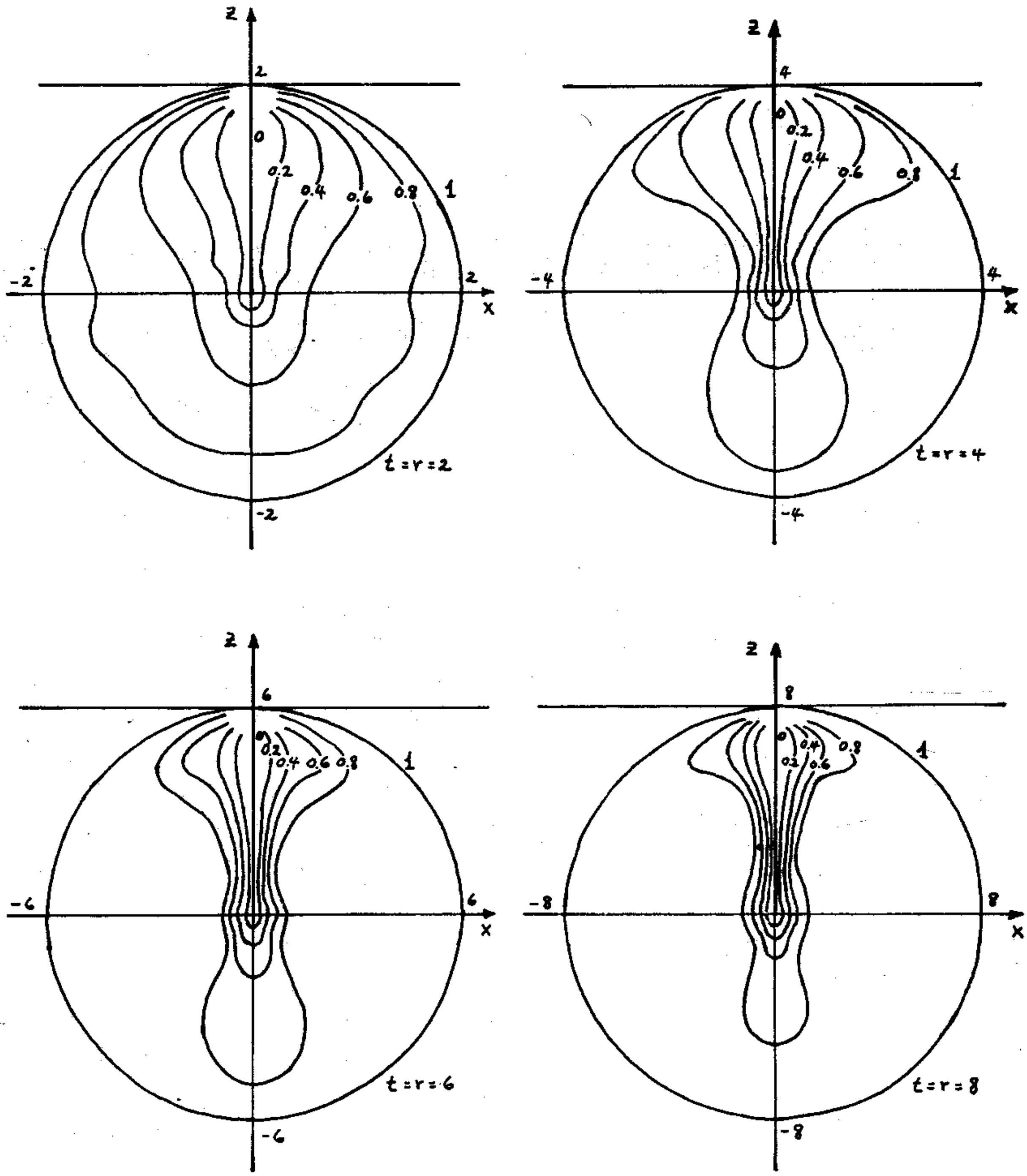
z
2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-2
2
x
t=r=2
-2
z
4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-4
4
x
t=r=4
-4
z
6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-6
6
x
t=r=6
-6
z
8
0
0.4
0.8
0.2
0.6
1
-8
8
x
t=r=8
-8

Figura 2.