

# Ajuste de curvas experimentales por mínimos cuadrados

José Carlos León Ortega, Instituto Central de Investigación Digital,  
José Ramón Carrocera García, Centro de Computación Aplicada a la Medicina

## RESUMEN

En el presente trabajo se resumen los aspectos teóricos más importantes relacionados con el ajuste de curvas experimentales utilizando la técnica de los Mínimos Cuadrados. En el método descrito se han tomado los polinomios ortogonales de Gram como base del desarrollo. Se discuten algunos criterios que deben tenerse en cuenta al ajustar curvas experimentales por este método, el cual se pone en práctica mediante un programa de computación y se aplica a distintos tipos de curvas. Se presentan los resultados de forma gráfica y se compara este método con otros que se aplican ampliamente.

Los resultados obtenidos muestran que el método puede ser aplicado a ajustes de curvas de diversas características en la Física Experimental, mediante un programa de computación de poca complejidad, con muy buenos resultados.

## ABSTRACT

In this paper the most important theoretical aspects relating experimental curve fitting employing the Least Square Method are presented. Gram orthogonal polynomials have been chosen for his purpose and some criteria that must be taken into account when carrying out curve fitting in this way are discussed.

The algorithm of a computer program and the results obtained applying such a program are presented and compared to those corresponding to other existing methods. Results, in the form of graphics, show that the method can be applied to curve fitting in Experimental Physics with very good results via a low-complexity computer program.

# INTRODUCCIÓN

---

En ocasiones es necesario en la Física determinar la expresión analítica que rige el comportamiento de un conjunto de puntos experimentales, o al menos tratar de aproximar (ajustar) una expresión ya conocida a dichos puntos, con el consiguiente reajuste de los coeficientes de la expresión, para así poder calcular puntos intermedios (interpolación) o calcular derivadas en cualquier punto del argumento.

El obtener funciones de aproximación para describir el comportamiento de una función en un dominio dado, pertenece a los métodos del Análisis Numérico, que desde el siglo pasado se vienen desarrollando. Sin embargo, con el surgimiento y avance de la Computación, estos métodos han tenido que ser mejorados y optimizados.

En este trabajo se presenta un método de aproximación funcional por la técnica de los Mínimos Cuadrados, proveniente del Análisis Numérico y su puesta en práctica mediante un programa de computación, para calcular el valor funcional y la primera derivada de la función, mediante una función de aproximación, así como la comparación con otros métodos y su utilización en la Física.

Este trabajo surgió por la necesidad de obtener el perfil de impurezas en un semiconductor, que como se sabe, depende de la primera derivada de la capacitancia de alta frecuencia, respecto al potencial aplicado al dispositivo, a partir de puntos experimentales que, por supuesto, poseen errores de medición.

## DESARROLLO DEL TEMA

### (I) TEORÍA

Los métodos de interpolación numérica, a pesar de que son muy fáciles de aplicar y que proporcionan un estimado del error del truncamiento, no son aplicables a los casos donde se tiene un conjunto de puntos experimentales afectados por errores de medición, con el objeto de encontrar una expresión de aproximación que pueda ser manipulada analíticamente para obtener derivadas.

La técnica que se describe a continuación permite, mediante los puntos experimentales, generar una función que al contener la misma información de los valores funcionales, no está afectada por los errores de medición.

#### *Principio de los Mínimos Cuadrados*

Considérese la función  $f(x)$  y  $\{x_i\}$ ,  $i=1, \dots, n$  como una secuencia de puntos experimentales, en los cuales se tienen valores observados de

$f(X)$ , que denotaremos por  $\bar{f}_i$ , que generalmente están afectados por errores. Se supone además que los errores en diferentes puntos dados, no están relacionados entre sí, es decir, son independientes.

Considérese además que  $\{\phi_j(X)\}$ ,  $j=0,1,\dots$  sea una secuencia de funciones definidas para cada  $X_i$ .

Si  $f(X)$  está aproximada por una combinación lineal de las  $\{\phi_j(X)\}$ , entonces:

$$f(X) \approx \sum_{j=0}^m a_j^{(m)} \phi_j(X_i) \quad i=1,\dots,n \quad (1)$$

donde las  $a_j^{(m)}$  son los coeficientes del desarrollo y se calculan haciendo mínima la cantidad:

$$\delta_m^2 = \sum_{i=1}^n \omega(X_i) \left[ \bar{f}_i - \sum_{j=0}^m a_j^{(m)} \phi_j(X_i) \right]^2 \quad (2)$$

La función  $\omega(X)$  se llama "peso" y se toma tal que:

$$\omega(X_i) \geq 0, \quad i=1,\dots,n$$

El índice "m" de  $a_j^{(m)}$  denota que estos coeficientes dependen de m. Si se determinan estos, de forma tal que se satisfaga (2), entonces la aproximación de  $f(X)$  sobre  $\{X_i\}$  por Mínimos Cuadrados es:

$$y_m(X) = \sum_{j=0}^m a_j^{(m)} \phi_j(X) \quad (3)$$

donde  $X$  es cualquier valor del argumento.

En la mayoría de los casos prácticos ocurre que se usa un número de funciones de aproximación ( $m$ ) menor que el número de puntos dado ( $n$ ), es decir,  $n > m + 1$ , y precisamente esta es la condición que permite "suavizar" la curva que representa los datos empíricos. (Se quiere expresar con "suavizar" la función al hecho de que la aproximación no siga estrictamente las variaciones causadas por los errores experimentales, conservando a la vez la información contenida en los puntos medidos).

A partir de ahora se considera la hipótesis de que para algún valor de  $m$ , digamos  $M$ , la función  $f(X)$  puede expresarse como una combinación lineal finita del conjunto de funciones  $\{\phi_j(X)\}$ , es decir:

$$f(X) = \sum_{j=0}^M a_j^{(M)} \phi_j(X) \quad (4)$$

Esta hipótesis no será siempre satisfecha en la práctica, pero si resulta una buena aproximación a la realidad, entonces los resultados derivados, basados en esta, serán más precisos.

Un método poderoso desarrollado por el Análisis Numérico resulta el considerar las funciones  $\{\phi_j(X)\}$  como un polinomio de grado  $j$ . El problema sería ahora determinar el grado de este polinomio  $M$ .

De hecho, si se escoge  $m=n-1$ , la cantidad (?) se hace cero, que es un mínimo, pero se pierden las propiedades de suavidad de las aproximaciones. Es por esto que se hace necesario hacer la siguiente hipótesis:

"Los errores

$$E_i = f(X) - \bar{f}_i \quad (5)$$

están distribuidos con media cero". [1]

Se demuestra que si esta hipótesis es correcta, el valor de:

$$\sigma_m^2 = \frac{\delta n^2}{n-m-1} \quad (6)$$

es independiente de  $m$ , para  $m=M, M+1, \dots, n-1$ , por lo tanto, en el proceso de cálculo hay que hallar  $\sigma_m^2$  para cada  $m$  y continuar hasta que esta cantidad decrezca con el incremento de  $m$ . Una vez que se ha alcanzado un valor correspondiente a una  $m$  determinada después del cual no ocurre decremento significativo de esta magnitud, se tendrá el valor de  $m$  de la hipótesis y la aproximación por Mínimos Cuadrados.

#### *Aproximación por polinomios ortogonales*

Si se usan polinomios ortogonales de grado  $j$ ,  $P_j(X)$ , entonces los coeficientes, del desarrollo, digamos  $b_j^{(m)}$ , no dependen de  $m$ , por lo que la función de aproximación se puede escribir:

$$y_m(X) = \sum_{j=0}^M b_j P_j(X) \quad (7)$$

Como los  $P_j(X)$  son ortogonales, cumplen la relación de ortogonalidad con una función peso apropiada. [1-2]

Ahora restaría generar los polinomios ortogonales. Se demuestra que para puntos experimentales uniformemente espaciados, tomando la función peso  $w(X) = 1$ , dado un número impar de puntos en un intervalo donde se puede, mediante un cambio de variables, hacer que el cero pertenezca al intervalo analizado y sea además centro de este, por lo que el número de puntos se puede expresar como  $n=2L+1$  donde  $L$  es la cantidad de puntos a un lado del centro del intervalo, y definiendo la nueva variable normalizada  $S$  tal que:

$$i = L + S \quad (8)$$

donde  $i=0, 1, 2, \dots, 2L$ , los polinomios ortogonales tienen la forma:

$$P_j(S, 2L) = \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} \frac{(j+k) (2k) (L+S) (k)}{(k!)^2 (2L) (k)} \quad (9)$$

donde  $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k)$

Estos polinomios  $P_j(S, 2L)$  son conocidos como "Polinomios Ortogonales de Gram". [1]

Con estos polinomios el cálculo de los coeficientes se realiza mediante las siguientes ecuaciones:

$$b_j = \frac{\omega_j}{\gamma_j} \quad (10)$$

$$w_j = \sum_{S=-L}^L \bar{f}_S P_j(S, 2L) \quad (11)$$

$$\gamma_j = \sum_{S=-L}^L P_j^2(S, 2L) \quad (12)$$

donde

$$S = \frac{X - X_0}{h} \quad (13)$$

donde  $X_0$  es el valor central del intervalo y  $h$  el paso de los valores del dominio.

Los polinomios de Gram satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$\frac{1}{\epsilon_{j+1}} P_{j+1}(S, 2L) = \frac{S}{\epsilon_j} P_j(S, 2L) - \frac{\beta_j}{\epsilon_{j-1}} P_{j-1}(S, 2L) \quad (14)$$

para  $j=0, 1, \dots$ , sabiendo que  $P_0(S, 2L) = 1$  y  $P_{-1}(S, 2L) = 0$ , donde

$$\beta_j = \frac{j^2 [(2L+1)^2 - j^2]}{4(4j^2 - 1)} \quad (15)$$

$$\epsilon_j = \frac{(2j)! (2L-1)!}{(j!)^2 (2L)!} \quad (16)$$

En el caso que se tome un conjunto de funciones del tipo de polinomios de grado  $j$ , se puede plantear, para los coeficientes del desarrollo:

$$\sum_{j=0}^m d_{jk} b_j^{(m)} = w_k \quad k = 0, \dots, m$$

donde:

$b_j^{(m)}$  - son los coeficientes

$$d_{jk} = \sum_{i=1}^n W_i P_j(X_i) P_k(X_i)$$

$$w_k = \sum_{i=1}^n W_i f_i P_k(X_i)$$

si se escogen los  $P_j(x)$  tales que los términos no diagonales de la matriz  $D = [d_{jk}]$  sean pequeños, comparados con los de la diagonal, entonces la matriz  $D$  no será muy singular. Pero si los  $P_j(x)$  son ortogonales sobre el conjunto de puntos  $\{X_i\}$ , entonces los términos fuera de la diagonal serán todos ceros; pues por definición, si  $P_j(x)$  son ortogonales:

$$\sum_{i=1}^n w_i P_j^{(n)}(X_i) P_k^{(n)}(X_i) = 0 \quad \text{si } j \neq k$$

donde el subíndice denota que los polinomios dependen del número de puntos  $n$ ; es decir:

$$d_{jk} = 0 \quad \text{si } j \neq k$$

Entonces el sistema:

$$\sum_{j=0}^m d_{jk} b_j^{(m)} = w_k \quad k=0, \dots, m$$

es  $d_{kk} b_k^{(m)} = w_k$

por lo que:

$$b_k^{(m)} = w_k / d_{kk} \quad k = 0, \dots, m$$

Esto hace que los  $b_k^{(m)}$  sean independientes de  $m$ .

Es decir, el uso de polinomios ortogonales nos evita las dificultades de tener la matriz del sistema mal condicionada, por lo tanto, como resultado, un error amplificado en la solución, y el tener que calcular la solución de las ecuaciones normales del problema muchas veces, para encontrar el grado del polinomio para un problema dado. Es decir, el uso de polinomios ortogonales requieren menos cálculo.

A continuación se muestra la dependencia funcional de los seis primeros polinomios de Gram:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{S}{L}, \quad P_2 = \frac{3S^2 - L(L+1)}{L(2L-1)}, \quad P_3 = \frac{5S^3 - [3L(L+1) - 1]S}{L(L-1)(2L-1)}$$

$$P_4 = \frac{35S^4 - 5[6L(L+1) - 5]S^2 + 3L(L+2)(L+1)(L-1)}{2L(L-1)(2L-1)(2L-3)}$$

$$P_5 = \frac{63S^5 - 35[2L(L+1) - 3]S^3 + [15L^3(L+2) - 5L(7L+10) + 12]S}{2L(L-1)(L-2)(2L-1)(2L-3)}$$

Obsérvese que los polinomios de orden impar ( $P_1, P_3, P_5, \dots$ ) tienen potencias impares de  $S$ , y lo contrario en los pares. Esto se observa claramente en la figura 1, donde se muestran las formas funcionales de estos seis primeros polinomios, en el intervalo  $X \in [0, 1]$  ( $S \in [-4, 4]$  para  $L = 4$ ). En la figura 2 se muestra el comportamiento de la primera derivada

de estos, en el mismo intervalo. Es de notar que en ambos casos se observa un crecimiento en los valores hacia los extremos del intervalo, no ocurriendo así en el interior de este, disminuyendo en la medida en que nos acercamos al centro. Es por esto que es lógico esperar un error mayor en la aproximación hacia los extremos del intervalo en relación con el que tiene lugar en el interior de este.

#### *Fuentes de errores*

Cuando se usan polinomios ortogonales, una posible fuente de error está en la computación de los  $b_j$ , pues si, por ejemplo, la magnitud de  $P_j(X)$  es pequeña para toda  $X_i$ , el cálculo del cociente (10) puede dar como resultado una pérdida substancial de exactitud. Esto no ocurre cuando se usan los polinomios de Gram con la variable normalizada  $S$ , pero puede constituir un problema serio cuando se usa la técnica de la relación de recurrencia para generar los polinomios. Para evitar esto se cambian los puntos experimentales de su intervalo original a uno más conveniente, es decir, normalizar la variable independiente.

Faltaría por definir el error con que se calculan los coeficientes  $b_j$ , es decir,  $\Delta b_j$ . Como se ha supuesto que las  $E_i$  dadas por (5) están distribuidas con media cero, la media de  $\Delta b_j$  es cero, por lo tanto, lo que tiene sentido calcular es la varianza de  $\Delta b_j$ , o sea  $\sigma^2 \Delta b_j$ .

Si se supone que los errores en puntos distintos no tienen relación entre sí, entonces:

$$\sigma^2 \Delta b_j = \frac{\sigma^2 m}{\gamma_j} \quad (17)$$

#### *II) Computación del método de Mínimos Cuadrados*

Si se desea aproximar una función por mínimos cuadrados, no es necesario tratar de ajustar la función a todos los datos. Es posible ajustar parte de estos con una función y otra parte con otra. Este es precisamente el método que se siguió para aplicar los Mínimos Cuadrados, cuando se tiene algún conocimiento de como debe ser la función a aproximar sobre todo el mango. Por lo que se debe hacer una partición de los datos para aproximar la función por tramos. En ausencia de un conocimiento analítico de las características de la función y de la existencia de puntos que sean extremos locales, así como puntos de inflexión, hay que usar un poco la intuición y el sentido común para poder realizar la fragmentación adecuada de los datos.

Sin embargo, como ya se dijo, el error en el valor funcional y en la derivada aumenta hacia los extremos de cada intervalo. Es por todo esto que cuando se fragmenta una curva para ser ajustada por segmentos independientes no se puede pretender obtener un perfecto "empate" o conti-

nuidad entre los valores calculados de dos segmentos contiguos.

Esta situación puede ser mejorada si se toman de dos a tres puntos adicionales en cada intervalo y que pertenezcan a los intervalos laterales. Con esto, el error afectará el cálculo de los valores correspondientes a estos puntos adicionales, por lo que posteriormente podrán ser ignorados y obtener una muy buena continuidad entre los valores funcionales y derivadas entre los segmentos.

Para obtener el valor funcional de la aproximación y la primera derivada en cualquier punto del intervalo analizado, se desarrollaron las expresiones anteriores hasta llegar a las siguientes: [3]

$$y(X) = \sum_{k=1}^{M+1} b_{k-1} \sum_{j=1}^K \frac{(-1)^{k+j-2} (k+j-2)! (L + \frac{X-X_0}{h})! (2L-j+1)!}{(k-j)! (L + \frac{X-X_0}{h} - j+1)! ((j-1)!)^2 (2L)!} \quad (18)$$

$$y'(X) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^M b_k \sum_{j=1}^K \frac{(-1)^{j+K} (j+k)! (2L-j)!}{(j!)^2 (k-j)! (2L)!} \prod_{\ell=1}^j \frac{(L + \frac{X-X_0}{h} - \ell+1)}{(L + \frac{X-X_0}{h} - q+1)} \quad (19)$$

El programa de computación permite que el usuario haga una partición a voluntad de los datos, teniendo, como se explicó anteriormente, un conocimiento previo de la forma funcional, a fin de poder ajustar los datos a expresiones de aproximación por tramos. En la figura 3 se muestra el diagrama en bloques del programa.

### III) Aplicaciones del método

A fin de poder evaluar el método aquí descrito, se simuló una función del tipo:

$$y(X) = X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 5 \quad (20)$$

para valores del argumento en el intervalo  $X \in [-0,6;0]$ .

En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos. En este intervalo del dominio se tomaron 7, 13, 25 y 31 puntos y se obtuvieron cuatro funciones de aproximación a la función dada en (20). Se observa que, en este caso, la aproximación es buena cuando el número de puntos en el intervalo es 25 y 31. El mayor error en la función de aproximación fue de 0,002% para el caso de 25 puntos y de 0,0007% para el de 31.

En este intervalo la función (20) presenta un punto de inflexión en  $X=-0,275$ , como se puede apreciar en la figura. Se puede notar en las dos primeras aproximaciones (7 y 13 puntos), donde las funciones de aproximación no son tan buenas (error de hasta 0,25%), estas cortan a la función (20) en dicho punto de inflexión, tratando de establecer un "balance" entre los subintervalos laterales a este punto. Estas dos primeras funciones de aproximación son rectas (polinomios de 1er grado), mientras



que en las dos restantes son polinomios de 4to. grado, con un error en la determinación de los coeficientes del desarrollo dados en la tabla 1.

Respecto a la derivada los errores máximos fueron de 38%, 37%, 0,22% y 0.1% respectivamente. Es decir, la aproximación más exacta es la que corresponde a la mayor cantidad de puntos en el intervalo.

La figura 5 muestra la función (20) pero en un intervalo mayor,  $X \in [-0.6, 1.6]$ . En este caso no se varió el número de puntos en el intervalo, sino que se dividió este en distintos intervalos en los cuales se realizaron aproximaciones independientes. El paso  $h$  entre puntos es fijo e igual a 0.05. Con este paso el intervalo posee 45 puntos.

La primera partición fue en dos subintervalos con 23 y 21 puntos cada uno. La segunda fue en cinco subintervalos de 9 puntos cada uno. Los errores encontrados fueron, para los valores funcionales, del orden de  $10^{-4}$  para la primera partición y de  $2 \cdot 10^{-6}$  % para la segunda. En cuanto a la derivada estos fueron no mayor de  $7 \cdot 10^{-4}$  y  $6 \cdot 10^{-5}$  % respectivamente.

El método de tomar dos o tres puntos a los lados fue ensayado con varios tipos de funciones y se obtuvieron muy buenos resultados.

En la figura 6 se ploteó la diferencia entre los valores funcionales encontrados respecto a los teóricos calculados para ambas particiones, mientras que en la figura 7 la diferencia en la derivada.

En la figura 8 se muestra una función teórica de características distintas a las anteriores, y las aproximaciones obtenidas. Este tipo de función posee una forma bastante compleja, pues es una función racional con términos exponenciales en el numerador y en el denominador, entre otros términos. Esta función relaciona la capacitancia de alta frecuencia asociada a la zona de carga espacial de un semiconductor empobrecido por un potencial aplicado. Como se observa esta curva presenta un punto de inflexión en 2300 mV (la presencia del punto de inflexión en este tipo de curva es muy frecuente, y ocurre cuando el semiconductor pasa de la zona de acumulación a la de empobrecimiento).

Esta curva se obtuvo a partir de un modelo teórico para un semiconductor con un sustrato constante [4], en este caso de concentración  $1 \cdot 10^{15}$  at.  $\text{cm}^{-3}$ .

En un primer intento se obtuvo la función de aproximación sobre el intervalo completo, y posteriormente se hizo una partición del dominio, tomando en cuenta la presencia del punto de inflexión, siendo este frontera entre los segmentos. El error encontrado fue de 1.5% para el valor funcional y en la derivada se observa una gran diferencia respecto a la

teórica. Al realizar la partición el error del valor funcional no fue mayor de  $1.10^{-2}$  %. Por lo tanto, la segunda aproximación es superior a la primera.

Este algoritmo fue usado para obtener la distribución de impurezas en el volumen de un semiconductor [3]. Esta magnitud depende de la primera derivada de la capacitancia de alta frecuencia respecto al potencial aplicado al semiconductor. Los resultados obtenidos han permitido instrumentar un método para determinar la distribución de impurezas en el semiconductor, y actualmente se trabaja en el perfeccionamiento de este.

El algoritmo matemático aquí expuesto fue utilizado en otros tipos de funciones como parábolas, parábolas cúbicas, gaussianas, exponenciales, potencias del tipo  $X^n$ , etcétera, y sin embargo, los resultados obtenidos fueron similares a los aquí mostrados, caracterizándose estos por lo siguiente:

1. al aumentar el número de puntos en un intervalo dado, las funciones de aproximación son más próximas a las reales.
2. De forma general, se obtienen mejores aproximaciones haciendo el proceso de aproximación por tramos, que haciéndose en el intervalo completo. Esto, por supuesto, depende de las características específicas de cada función.
3. En principio, en la medida en que se aumenta la partición del intervalo, la aproximación es mejor. Sin embargo, como ya se explicó, depende mucho del tipo de función de que se trate.

Observando el comportamiento de la función, su concavidad en un tramo dado, la existencia de puntos de inflexión, subintervalos donde cambia más rápidamente la función, etcétera, son elementos a tener en cuenta a la hora de hacer una partición determinada del intervalo total.

4. El error tanto en la derivada como en los valores funcionales crecen en la medida en que nos acercamos a los extremos del intervalo.

La función de aproximación a un caso concreto se obtiene de sustituir los coeficientes  $b_j$  del desarrollo y las formas analíticas de los polinomios  $P_j$  y operar algebraicamente hasta obtener una función del tipo:

$$Y_{\text{aprox}}(X) = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_M X^M$$

que puede ser derivada tantas veces como se desee.

### III) CONCLUSIONES

El algoritmo de aproximación numérica aquí descrito permite obtener funciones aproximadas a funciones reales, las que pueden ser derivadas hasta el orden que se desee.

En comparación con otros algoritmos numéricos desarrollados, este posee la ventaja de su simplicidad algebraica, de los pocos datos que se necesitan para encontrar la aproximación, así como la exactitud de los resultados. Si se compara con el método de Gauss-Duolittle [5] la diferencia en la exactitud y simplicidad es significativa, sin embargo si se compara con el método de aproximaciones por funciones racionales usando polinomios de Chebishev [1], resulta menos preciso, pues este mantiene acotado el error máximo en el intervalo, pero se necesitan muchos más datos para realizar la aproximación (coeficientes del desarrollo de Maclaurin de la función, etcétera). En general, el método de los Mínimos Cuadrados, usando cualquier tipo de función como base para el desarrollo, es el único método que da solución única al problema de hallar los coeficientes de dicho desarrollo [6].

Este algoritmo ha permitido obtener magnitudes físicas a partir de otras que son el resultado de mediciones experimentales, por lo que poseen un error. Tal es el caso del perfil de impurezas en un semiconductor.

#### IV) AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo quieren expresar sus agradecimientos a los compañeros C.Dr. Manuel H. Calviño, C.Dr. José Folgueras, C.Dr. Magali Estrada por la ayuda prestada en la realización de este, y en especial, la del Lic. Luis Diego Méndez sin la ayuda de quien estamos seguros no hubiera sido posible la culminación de este trabajo.

Tabla 1.

Características de la aproximación para el caso de 25 y 31 puntos

aproximación	coeficientes	error
25 puntos	$b_0 = 4.8038$	no mayor de $1.7 \times 10^{-5}$
	$b_1 = 0.1821$	
	$b_2 = -4.4580 \times 10^{-3}$	
	$b_3 = 0.0171$	
	$b_4 = 1.3789 \times 10^{-3}$	
31 puntos	$b_0 = 4.8038$	no mayor de $1.1 \times 10^{-5}$
	$b_1 = 0.1817$	
	$b_2 = -4.5084 \times 10^{-3}$	
	$b_3 = 0.01754$	
	$b_4 = 1.5235 \times 10^{-3}$	

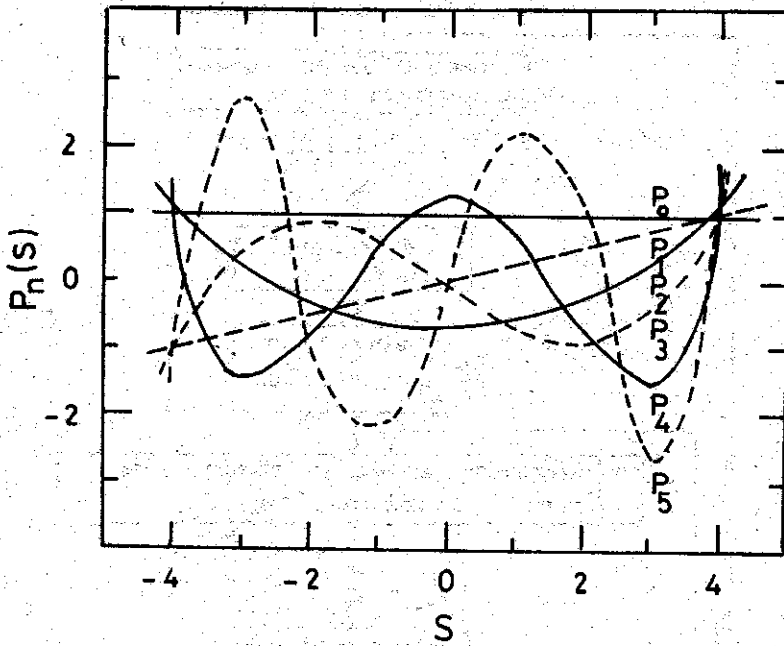


Fig. 1. Primeros seis polinomios de Gram en el intervalo  $X \in [0, 1]$  ( $S \in [-4, 4]$ ).

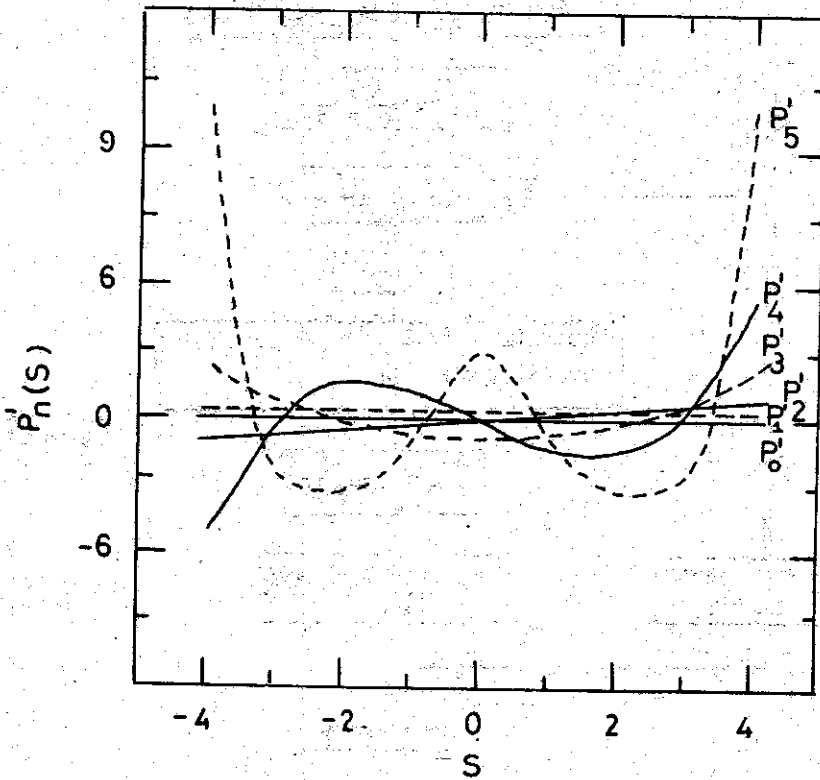


Fig. 2. Derivadas de los seis primeros polinomios de Gram en el intervalo  $X \in [0, 1]$  ( $S \in [-4, 4]$ ).

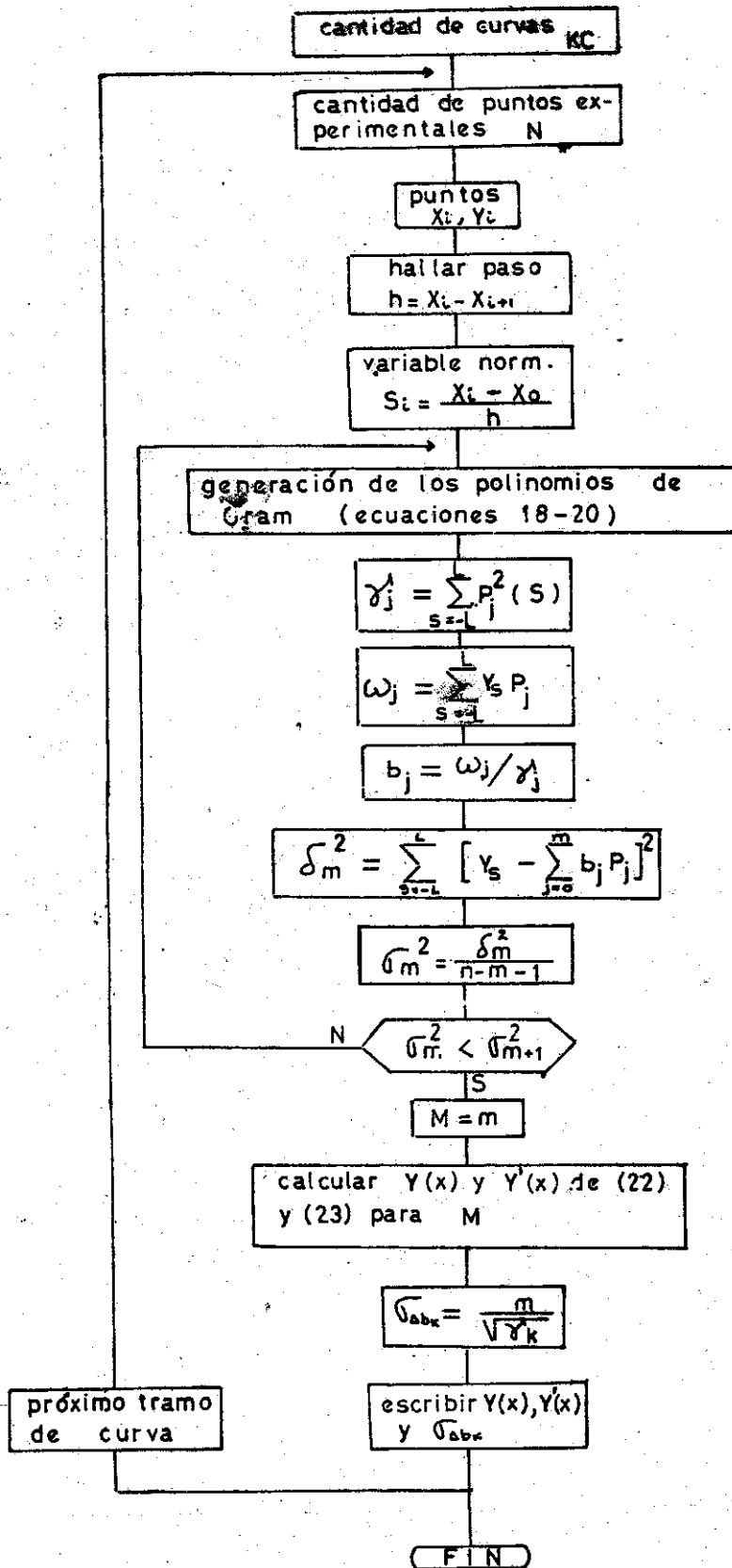


Fig. 3. Diagrama en bloques del programa de los Mínimos Cuadrados.

Figura 4.  
 Las funciones de aproximación correspondientes a 25 y 31 puntos no se muestran, ya que se diferencian de la función teórica en un 0.001%.

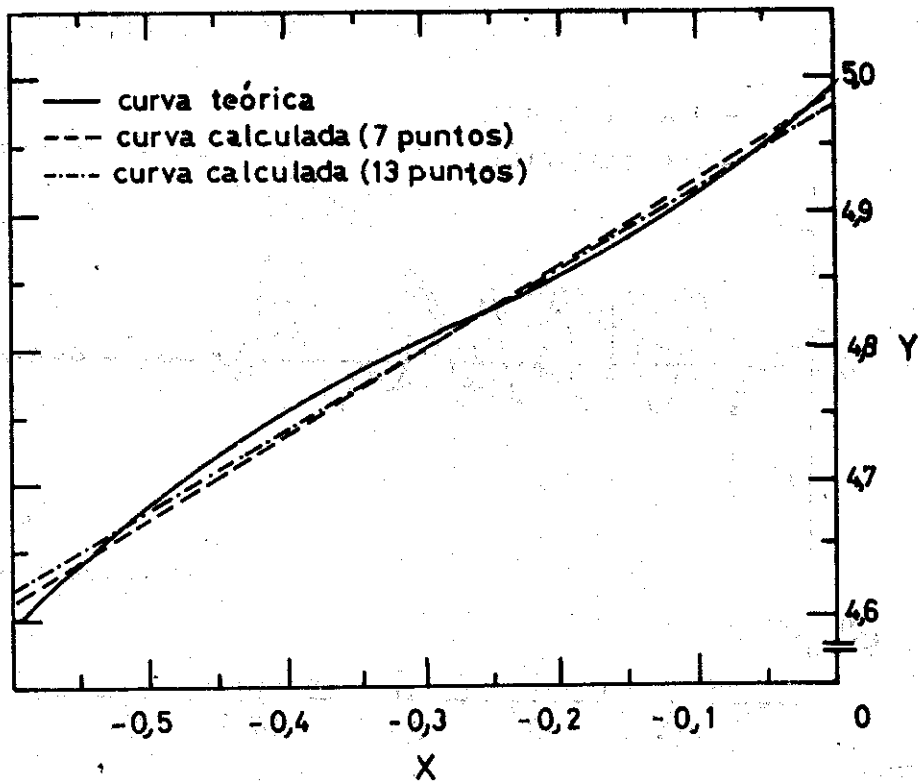
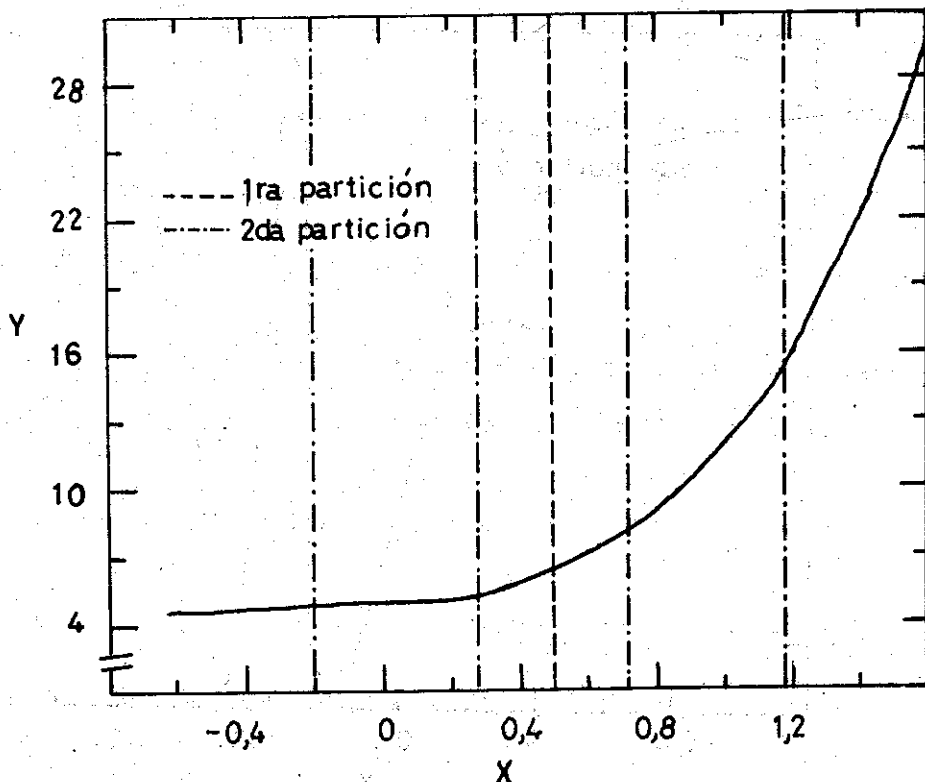


Figura 5.  
 Particiones realizadas al intervalo. No se muestran las funciones de aproximación por diferenciar se de la teoría en un 0.0001%.



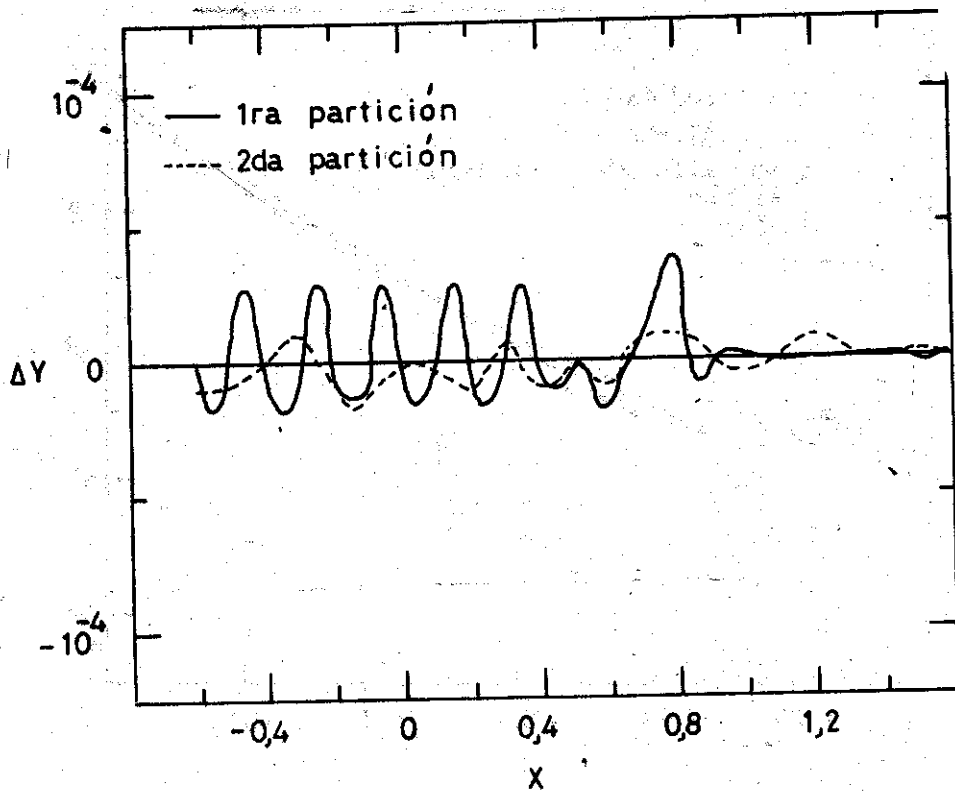


Figura 6.  
Diferencia entre los valores funcionales calculados y los te3ricos.

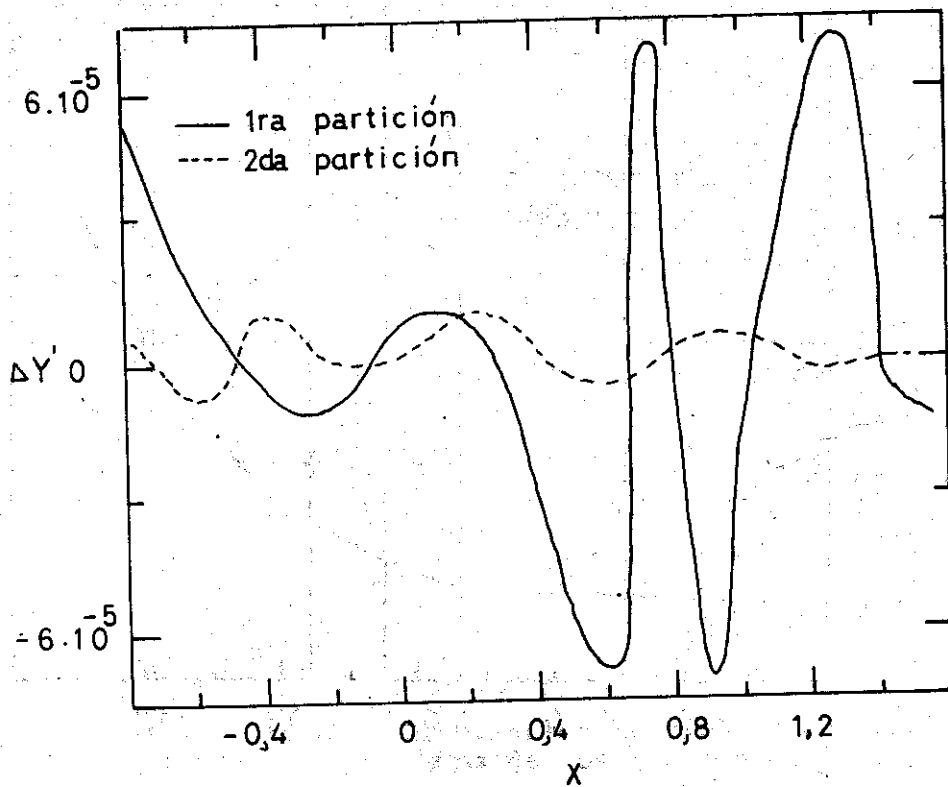


Figura 7.  
Diferencia entre las derivadas calculadas y las te3ricas.

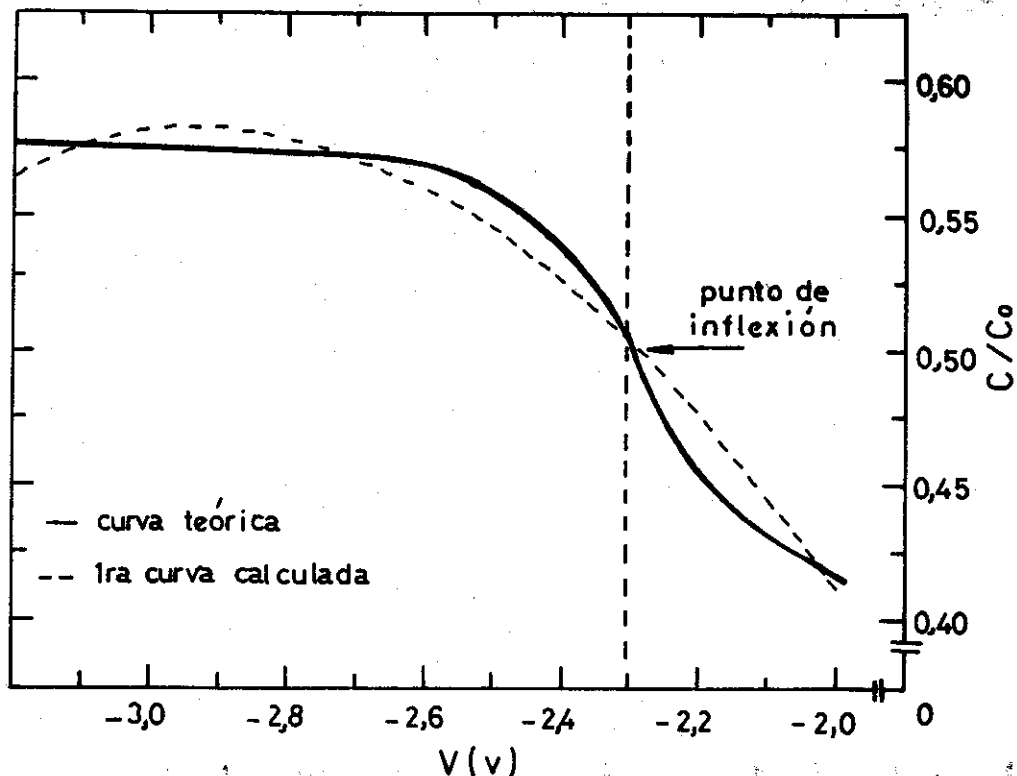


Fig. 8. Procesamiento de la curva C vs V, normalizada a la capacidad del óxido  $C_o$ , para un semiconductor tipo P, con concentración de sustrato de  $1 \cdot 10^{15}$  al  $\text{cm}^{-3}$ . La segunda curva calculada no se muestra ya que se diferencia de la teórica en un 0.01%.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ralston, A.  
Introducción al Análisis Numérico. Limusa-Wiley, S.A. (1970)
- [2] Richard, W.H.  
Numerical Methods for Scientists and Engineers. Mc. Hill Book Co. (1962).
- [3] León Ortega, J. C.; J.R. Carrocera; M. Estrada  
Determinación de perfiles de distribución de impurezas por el método C-V.  
(Presentado en la IV Conferencia Científica Ciencias Naturales-UH 1984).
- [4] Sze, S.M.  
Physics of Semiconductor Devices. John Willey & Sons. New York (1969).
- [5] Trojnmienko, Ia. K.  
Inzheniernie raschioti na microcalculiatoraj. Kiev Tejnica (1980).
- [6] Varela, J.A.  
Ajuste de curvas experimentales. Editorial Oriente (1981).

Recibido: 30/7/84