La expansión libre del gas ideal

M.A.H. García Díaz. Dpto. de Ciencias Básicas
I.S.P.E.T.P.

RESUMEN

En este trabajo estudiamos, valiéndonos del supuesto de Gurney, la expansión libre de una distribución esférica de gas ideal. El procedimiento seguido conduce a una imagen descriptiva, mucho más representativa del fenómeno, que permite la deducción de la ecuación del movimiento de expansión del sistema por dos caminos diferentes.

ABSTRACT

In this paper we assume the Gurney's supposition in order to study the free expansion in a spherical distribution of an ideal gas. This enables the deduction of the system expansion movement equation by two different ways.

INTRODUCCIÓN

La expansión de una masa finita de gas ideal en el vacío, continúa desde el célebre experimento de Joule [1], en el terreno fenomenológico, sin una explicación satisfactoria que revele la dinámica del verdadero proceso que la origina, ni una descripción analítica consistente.

Por otra parte, en los últimos años, el problema de la expansión de los gases, debido a la detonación de potentes explosivos, ha sido abordado, como cuestión principal, en los cálculos balísticos de Gurney [2], sobre el supuesto de que la densidad de masa de éstos, cuando se satisfacen requerimientos previos de uniformidad respecto a la distribución espacial de la sustancia, se mantiene uniforme durante la expansión. Aunque esta hipótesis, con carácter de condición, se ha considerado para tratar analíticamente, dentro de las diversas facetas [3] que el problema de la expansión de los gases en el vacío presenta, el caso de una masa semi-infinita de un gas [4], es en los trabajos de Gurney, donde resulta verdaderamente fructífera, debido a los resultados alcanzados, adquiriendo el carácter de una propiedad más de los gases. Por consiguiente, la extensión de dicha hipótesis a una distribución esférica de gas ideal, cuya densidad de masa, inicial, sea uniforme y que se expanda libremente en el vacío, no debe ser cuestionable, si bien las transformaciones energéticas y la causa del fenómeno no resultan obvias. Para entender las primeras, en el presente trabajo, aplicamos el principio de independencia de los movimientos, mientras la causa del fenómeno recae en la interpretación dinámica del intercambio de momento lineal [5] entre los subsistemas de forma hemisférica en que virtualmente, se subdivide al gas, de modo que la aparición de fuerzas de intercambio [6] conduce a la determinación de la ecuación del movimiento de expansión del sistema. De esta manera se ofrece un cuadro del mecanismo de la expansión libre de los gases que supera la concepción elemental tradicional, la cual atribuye el citado fenómeno al simple movimiento molecular, y que permite, además, derivar a partir de las fuerzas de intercambio. la correspondiente energía potencial de interacción de los subsistemas, lo cual posibilita, desde un punto de vista energético, volver a deducir la ecuación del movimiento de expansión del sistema.

FUERZAS DE INTERCAMBIO

Consideremos un sistema, de masa M, que es un gas ideal monoatómico no degenerado, confinado en un recipiente de forma esférica de radio R_0, no sometido a la acción de ningún campo de fuerzas externo (ver figura 1). Igualmente supondremos despreciable el campo gravitacional de la masa M que en tales condiciones se encuentra uniformemente distribuida dentro del volumen limitado por la pared del recipiente, siendo $\sqrt{\bar{V}_0^2}$ la velocidad cuadrática media del movimiento térmico estableceremos que, además de la pared del recipiente, el resto del ambiente es el vacío. Supongamos ahora, que las partes constituyentes de la pared del recipiente se separan tan rápidamente que las moléculas del gas no pueden alcanzarlas, de manera que este se expansiona libremente en todas las direcciones del espacio, por lo que, de modo natural, surge el interrogante relativo a la distribución espacial de la sustancia del sistema durante la expansión. Al respecto, admitiremos que durante la expansión libre del gas ideal su densidad de masa, ρ, es uniforme.

Seleccionemos un sistema inercial de referencia (S.I.R.), cuyo origen coincide con el centro de masa, O, de la esfera gaseosa que se expande (ver figura 2). Desde el S.I.R. la velocidad de cada molécula puede desomponerse en dos componentes: una radial $\vec{V}_r$, cuya dirección aleja a la molécula de O, mientras la directriz de la otra $\vec{V}_a$, es arbitraria. Gracias a este procedimiento de descomposición podemos lograr que todas las moléculas que equidistan de O tengan la misma rapidez radial, que puede ser atribuida al movimiento de expansión del gas, en tanto el conjunto de las componentes de velocidad de cada molécula, cuyas directrices son arbitrarias, corresponderá al movimiento térmico residual, cuya velocidad cuadrática media la designaremos por $\sqrt{\bar{V}^2}$. La superposición de los movimientos expansivo y térmico puede expresarse analíticamente, con la ayuda de la ley de conservación de la energía, así

$$M\bar{V}_0^2/2 = M\bar{V}^2/2 + E' \qquad (1)$$

donde E' es la energía cinética debida al movimiento de expansión, mientras el primer término del miembro derecho de la anterior ecuación es la energía del movimiento térmico residual.

Fijémonos, a continuación, en los subsistemas de forma hemisférica que el plano YZ divide al gas, pues a través del mismo se produce una transferencia de momento lineal de un subsistema al otro y viceversa, como consecuencia del intercambio de moléculas entre los mismos, debido al movimiento térmico residual, que equivale, dinámicamente, a sendas fuerzas sobre los subsisde resulta verdaderamente fructífera, debido a los resultados alcanzados, adquiriendo el carácter de una propiedad más de los gases. Por consiguiente, la extensión de dicha hipótesis a una distribución esférica de gas ideal, cuya densidad de masa, inicial, sea uniforme y que se expanda libremente en el vacío, no debe ser cuestionable, si bien las transformaciones energéticas y la causa del fenómeno no resultan obvias. Para entender las primeras, en el presente trabajo, aplicamos el principio de independencia de los movimientos, mientras la causa del fenómeno recae en la interpretación dinámica del intercambio de momento lineal [5] entre los subsistemas de forma hemisférica en que virtualmente, se subdivide al gas, de modo que la aparición de fuerzas de intercambio [6] conduce a la determinación de la ecuación del movimiento de expansión del sistema. De esta manera se ofrece un cuadro del mecanismo de la expansión libre de los gases que supera la concepción elemental tradicional, la cual atribuye el citado fenómeno al simple movimiento molecular, y que permite, además, derivar a partir de las fuerzas de intercambio. la correspondiente energía potencial de interacción de los subsistemas, lo cual posibilita, desde un punto de vista energético, volver a deducir la ecuación del movimiento de expansión del sistema.

FUERZAS DE INTERCAMBIO

Consideremos un sistema, de masa M, que es un gas ideal monoatómico no degenerado, confinado en un recipiente de forma esférica de radio R_0, no sometido a la acción de ningún campo de fuerzas externo (ver figura 1). Igualmente supondremos despreciable el campo gravitacional de la masa M que en tales condiciones se encuentra uniformemente distribuida dentro del volumen limitado por la pared del recipiente, siendo $\sqrt{\bar{V}_0^2}$ la velocidad cuadrática media del movimiento térmico estableceremos que, además de la pared del recipiente, el resto del ambiente es el vacío. Supongamos ahora, que las partes constituyentes de la pared del recipiente se separan tan rápidamente que las moléculas del gas no pueden alcanzarlas, de manera que este se expansiona libremente en todas las direcciones del espacio, por lo que, de modo natural, surge el interrogante relativo a la distribución espacial de la sustancia del sistema durante la expansión. Al respecto, admitiremos que durante la expansión libre del gas ideal su densidad de masa, ρ, es uniforme.

Seleccionemos un sistema inercial de referencia (S.I.R.), cuyo origen coincide con el centro de masa, 0, de la esfera gaseosa que se expande (ver figura 2). Desde el S.I.R. la velocidad de cada molécula puede desomponerse en dos componentes: una radial $\vec{V}_r$, cuya dirección aleja a la molécula de O, mientras la directriz de la otra $\vec{V}_a$, es arbitraria. Gracias a este procedimiento de descomposición podemos lograr que todas las moléculas que equidistan de O tengan la misma rapidez radial, que puede ser atribuida al movimiento de expansión del gas, en tanto el conjunto de las componentes de velocidad de cada molécula, cuyas directrices son arbitrarias, corresponderá al movimiento térmico residual, cuya velocidad cuadrática media la designaremos por $\sqrt{\bar{V}^2}$. La superposición de los movimientos expansivo y térmico puede expresarse analíticamente, con la ayuda de la ley de conservación de la energía, así

$$M\bar{V}_0^2/2 = M\bar{V}^2/2 + E' \qquad (1)$$

donde E' es la energía cinética debida al movimiento de expansión, mientras el primer término del miembro derecho de la anterior ecuación es la energía del movimiento térmico residual.

Fijémonos, a continuación, en los subsistemas de forma hemisférica que el plano YZ divide al gas, pues a través del mismo se produce una transferencia de momento lineal de un subsistema al otro y viceversa, como consecuencia del intercambio de moléculas entre los mismos, debido al movimiento térmico residual, que equivale, dinámicamente, a sendas fuerzas sobre los subsistemas, cuyas respectivas masas, como consecuencia de la hipótesis formulada, son iguales. Para poder determinar el valor de estas fuerzas, F. debemos tener en cuenta la ecuación fundamental de la Teoría Cinética de los Gases [7] y el área de la superficie del plano YZ que constituye la frontera común de ambos hemisferios, entonces se tiene

$$F = M\bar{V}^2/4R \qquad (1)$$

ENERGÍA CINÉTICA EXPANSIVA

Procedamos a determinar la energía cinética que producto de la expansión, tiene en un instante dado, una masa M de un gas ideal de densidad de masa, ρ, que es una esfera de radio R, cuya superficie posee una velocidad radial V_R. La energía cinética, dE', de un cascarón esférico de radio r y espesor dr, cuya velocidad radial de expansión es V_r, viene dada por

$$dE' = 2\pi\rho r^2 V_r^2 dr \qquad (3)$$

A partir del supuesto de que la densidad de masa es uniforme puede demostrarse que $V_r = r.V_R/R$ (4)

Sustituyendo (4) en (3), e integrando entre O y R queda

$$E' = 3MV_R^2/10 \qquad (5)$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE EXPANSIÓN

Consideremos el subsistema que, en la figura 2, corresponde al hemisferio derecho de la esfera representada, y denotemos por u la velocidad de su centro de masa. Por la Segunda Ley de Newton, la ecuación (?) y la expresión

$u = 3V_R/8$ (6),

que deriva de la relación

$s = 3R/4$ (7),

existente entre la posición, s/2, del centro de masa del subsistema con respecto a O y el Radio de la esfera, se tiene

$$dV_R/dt = 4\bar{V}^2/3R$$

que con el auxilio de (1) y (5), y recordando que para $R=R_0$, $V_{R_0}=0$ resulta

$$V_R = \sqrt{5\bar{V}_0^2[1-(R_0/R)^{8/5}/3} \qquad (8)$$

Las ecuaciones (1), (5) y (8) nos permiten escribir (2) así

$$F = M\bar{V}_0^2 \cdot R_0^{8/5} / 4R^{13/5} \qquad (9)$$

que nos sugiere definir la energía potencial de interacción de los subsistemas de la siguiente manera

$$U = \int_0^\infty F \cdot ds$$

que con la ayuda de (7) y (9) se obtiene

$$U = 15M\bar{V}_0^2(R_0/R)^{8/5}/128 \qquad (10)$$

Ahora, por consideraciones energéticas, es posible volver a deducir la ecuación (8). Efectivamente de (10)

$$U_{(R_0)} = 15M\bar{V}_0^2/128 \qquad (11)$$

y por la ley de conservación de la energía mecánica

$$U_{(R_0)} = U_R + Mu^2/2$$

que utilizando (11), (10) y (6) se llega, nuevamente, a la ecuación (9), de la cual se sigue que

$$\lim_{R\to\infty} V_R = \sqrt{5\bar{V}^2/3}$$

y, sustituyendo en (5), se obtiene que el valor máximo de la energía cinética de expansión es igual al valor de la energía interna inicial, lo que constituye un resultado acorde con la imagen descriptiva del fenómeno, plasmada en este artículo.

1. Se expone una descripción dinámica de la expansión libre de una distribución esférica de un gas ideal, que permite su tratamiento teórico.

2. Se deriva y aplica la expresión analítica de la energía potencial de interacción de los subsistemas en que se divide virtualmente la masa gaseosa, y que está asociada a las fuerzas de intercambio.

3. Se deduce la ecuación que rige el movimiento de expansión del sistema, demostrándose, en consonancia con la imagen propuesta y la naturaleza física del fenómeno, que el valor máximo de la energía cinética de expansión es igual a la energía interna inicial.

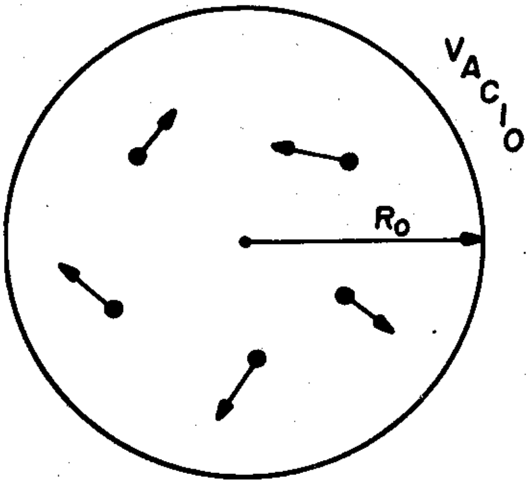

FIG.1_

RECIPIENTE ESFÉRICO QUE CONTIENE UN GAS IDEAL._

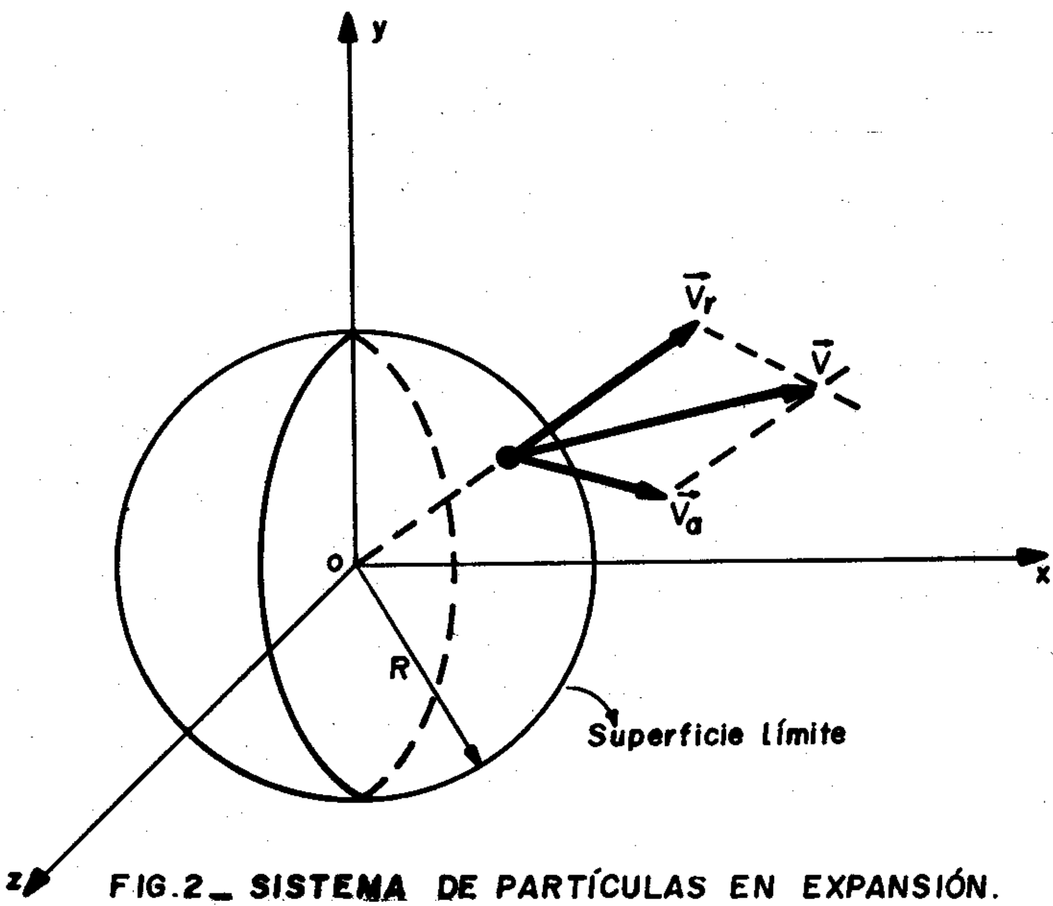

FIG.2_ SISTEMA DE PARTÍCULAS EN EXPANSIÓN.

BIBLIOGRAFÍA

1. Sears, F.W.
   Introducción a la Termodiná mica, Teoría Cinética de los Gases y Mecánica Estadística. (Reverté, España, 1959), p. 63.
2. Jones, G.E.
   Amer. J.Phys. 48, 264. (1980)
3. Bird, G.A.
   The Physics of Fluids. Vol. 16, No.11, (1973).
4. Bond. J.W.
   Atomic Theory of Gas Dynamics. (Addison Wesley, N.Y. 1965).
5. di Sessa A. Andrea
   Amer. J.Phys. 48, 365. (1980).
6. Franke, H.
   Diccionario de Física. (Labor, S.A., España, 1967) p. 839.
7. Frish, S., A.Timoreva
   Curso de Física General. (Mir, Moscú, 1967). Tomo I. p. 194.