

El solapamiento de las moléculas en la teoría cinética

M.A.H.García Díaz. Dpto. de Ciencias Básicas. I.S.P.E.T.P. J.L.Gondar.
Dpto. de Física Teórica, Universidad de La Habana

RESUMEN

La deducción de la ecuación del recorrido libre medio de la molécula del gas ideal, condicionada a la ausencia del movimiento relativo de las restantes moléculas y que prescinde del solapamiento de estas, se encuentra en algunos textos de obligada consulta por los estudiantes de nivel superior. La misma, aunque aparentemente satisfactoria, propende a fomentar ideas erróneas sobre la imagen física del fenómeno que se estudia. Por esto, tomando como premisa el recubrimiento de unas moléculas por las secciones de otras, presentamos un estudio detallado al respecto de forma coherente desde el punto de vista científico-metodológico, que por los resultados alcanzados contribuye a la unidad y ampliación del tema.

ABSTRACT

The deduction of the molecule mean free path equation in the ideal gas, conditioned to the absence of the molecules relative motion and ignoring the overlap between them, is reported in some popular textbooks in freshmen physics. The deduction, although satisfactory in appearance, tends to improve wrong ideas concerning to the physical picture of this subject. Because of this difficulty, and taking into account the molecules overlapping, we present a coherent approach in the scientific and metodological sense, that we hope may contribute to a real understanding of the problem.

INTRODUCCIÓN

La deducción de la ecuación del recorrido libre medio de la molécula (r.l.m.), sin tener en cuenta la corrección impuesta por su movimiento relativo, se debe /1 al 4/ a Clausius, quien introdujo este im-

portante concepto con la finalidad de explicar la lentitud con que transcurre la difusión de los gases, hecho experimental que en el desarrollo de la Teoría Cinética, resultaba paradójico /5/ por el orden

atribuido a las velocidades moleculares. Sin embargo, la deducción original de Clausius /6/, por la forma de definir la probabilidad de choque, carece de una metodología que resulte del agrado de la mayoría de los autores de textos sobre la materia, quienes, en su lugar, nos ofrecen la conocida Deducción Elemental /7/ que, exceptuando la partícula objeto de estudio, supone a las restantes moléculas del gas en reposo y de la consideración de la frecuencia media de choques, alcanza el objetivo propuesto. En realidad, la Deducción Elemental es simple e inmediata, razón por la que en muchos textos /8,9,10/ se encuentra expuesta de

diversas formas; pero al no permitirnos la aplicación de las nociones estadísticas, nos priva de su carácter general, del cual queda constancia expresa en este trabajo, en el que exponemos al respecto una deducción nueva a partir del hecho de que la distribución espacial uniforme y desordenada de las moléculas, a la hora de determinar la probabilidad de choque de las mismas, impone la necesidad de considerar el recubrimiento de las secciones eficaces de unas moléculas por otras. La importancia de este análisis se patentiza mejor en el conjunto de resultados a los cuales se arriba de manera directa.

ANÁLISIS Y DEDUCCIONES

Consideremos un gas ideal, de densidad uniforme, contenido en un recipiente de longitud L y área S . Sea σ la sección eficaz de choque de cada una de las N moléculas, para una partícula que se mueve a través del gas. Supongamos que estas moléculas están en reposo, y sea n el número de moléculas por unidad de volumen. Si conforme se ilustra en la figura, la partícula m penetra en el gas, determinemos la probabilidad de que dicha partícula choque en el intervalo $(x, x + dx)$.

Subdividamos el volumen Sx en k capas de espesor Δx , suficientemente pequeño para que, en cada una de las mismas, la proyección de las secciones de las moléculas, sobre el plano YZ , no se sobrecubran entre sí. En la primera capa, la citada partícula puede chocar con cualquiera de sus ΔN moléculas, donde $\Delta N = S_n \Delta x$ (1). Como estas moléculas recubren un área $\sigma \Delta N$ a partir de la segunda capa, resulta que la partícula puede chocar con cualquiera de las

$$\Delta N_1 = S_1 n \Delta x$$

moléculas no solapadas del intervalo $(\Delta x, 2\Delta x)$, siendo

$$S_1 = S - \sigma \Delta N$$

de aquí y con el auxilio de (1), tenemos

$$\Delta N_1 = \Delta N (1 - \sigma n \Delta x)$$

Continuando reiteradamente, este proceso obtendremos para el intervalo $(x, x + \Delta x)$

$$\Delta N_x = \Delta N (1 - \sigma n \Delta x)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

y realizando las operaciones pertinentes

$$dN_x = S n dx \cdot \exp(-\sigma n x) \quad (2)$$

Luego, el número de moléculas no solapadas, N_L , en el recipiente, es

$$N_L = [(1 - \exp(-\sigma n L))] S / \sigma \quad (3)$$

y el número máximo de moléculas no solapadas, N_{\max} , resulta

$$N_{\max} = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L = S / \sigma \quad (4)$$

Por consiguiente, se desprende que la probabilidad de choque, entre x y $x + dx$, la definamos como

$$d\phi = dN_x / N_{\max}$$

de modo que

$$d\phi = -d[\exp(-\sigma n x)] \quad (5)$$

La ecuación (5) nos permitirá deducir, conjuntamente, el r.l.m., $\bar{\lambda}$, y la ecuación de Clausius de los recorridos libres. El r.l.m. viene dado /11/ por

$$\bar{\lambda} = \sigma n \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\sigma n x} dx$$

de donde

$$\bar{\lambda} = 1/\sigma n \quad (6)$$

La probabilidad, θ , de que la referida partícula recorra la distancia x sin chocar es

$$\theta = 1 - \int_0^x e^{-\sigma n x^1} \cdot \sigma n dx^1 = e^{-\sigma n x}$$

por tanto, si inicialmente tenemos N_0 moléculas, de ellas quedarán sin chocar, después que cada molécula se desplaza una distancia x medida a lo largo de la dirección de su movimiento, un número N dado por $N = N_0 \cdot \theta$, o sea

$$N = N_0 \cdot \exp(-x/\bar{\lambda}) \quad (7)$$

que és la ecuación de Clausius.

Por último, si relacionamos las

expresiones (4) y (6) obtendremos

$$S n \bar{\lambda} = N_{\max} \quad (8)$$

de modo que el número de moléculas contenidas en el trayecto $(0, \bar{\lambda})$ es igual al número máximo de moléculas cuyas secciones eficaces no se solapan para la partícula en su recorrido libre.

Uno de los aspectos positivos de la formulación precedente consiste en que permite establecer, en el gas ideal, una medida del solapamiento, ξ , mediante la relación

$$\xi = (S n L - N_L) / S n L$$

que considerando (3) y haciendo $\sigma n L = z$, se tiene

$$\xi = 1 - z^{-1} (1 - e^{-z}) \quad (9)$$

DISCUSIÓN

El procedimiento empleado en la deducción de la ecuación del r.l.m. nos ha permitido derivar, conjuntamente, la ecuación de Clausius que, tradicionalmente se deduce por una línea de razonamientos distinta. Esto constituye una indiscutible ventaja en comparación con el procedimiento de la Deducción Elemental que no puede aspirar a semejante síntesis.

Si bien prescindir del solapamiento en una capa de gas de espesor sumamente pequeño es, según (9), una idealización permisible, en cambio, hacerlo de manera absoluta resulta costoso por las concepciones físicas erróneas que acarrea. Esto se manifiesta en la deducción de la ecuación del r.l.m. que aparece en algunos textos /12/, 13/, la cual requiere que el número de moléculas contenido en una distancia igual a $\bar{\lambda}$ se distribuyan de modo que sus secciones eficaces no se solapen y el área total de obstrucción sea S . Aceptado este requisito, es correcto definir la probabilidad de choque de la partícula con una molécula, independientemente de su posición, como σ/S /14/, o interpretar tácitamente, la ecuación (6) como condición de normalización /15/. Conscientes de

la necesidad de fundamentar el citado requisito, I.Kikoin y A.Kikoin, en su libro "Física Molecular" /16/, restringen la deducción que nos presentan al gas altamente enrarecido, convencidos de que en tal estado el solapamiento en una capa de espesor $\bar{\lambda}$ es insignificante; sin embargo, la imagen del no-solapamiento en $\bar{\lambda}$ exigido por esta deducción, cuyo verdadero fundamento teórico lo constituye la propiedad contenida en la expresión (8), no debe interpretarse como un reflejo del comportamiento de los gases a medida que su enrarecimiento aumenta. Prueba de ello es que si $L = \bar{\lambda}$, de (3), se tiene

$$N_{\bar{\lambda}} = \frac{S}{\sigma} (1 - e^{-1})$$

de modo que el número de moléculas cuyas secciones eficaces no se recubren en el intervalo $(0, \bar{\lambda})$, para cualquier $\bar{\lambda}$, es independiente de n . Por otra parte, recordando (4), se sigue que

$$N_{\bar{\lambda}} = 0,632 N_{\max}$$

de donde se desprende que el número de moléculas solapadas en $\bar{\lambda}$ es digno de estimación. Una información análoga se adquiere de (9), pues haciendo $z=1$ se tiene

$$\xi = 0,368$$

o sea, un poco más de la tercera parte de las moléculas contenidas en λ están solapadas para la partícula en movimiento. Todas estas observaciones nos advierten que la imagen del no-solapamiento en λ , justificable y valiosa como recurso analítico, resulta insostenible por sus inconsistencias, si se le atribuyen visos de realidad física. Como colofón de este análisis, estimamos pertinente ofrecer la debatida deducción del r.l.m., de forma algo diferente a la expuesta por los referidos autores: imaginemos que las moléculas contenidas en λ no se solapan, entonces, la probabilidad de choque, $d\phi$, entre x y $x + dx$, para la partícula que atraviesa el gas, es

$$d\phi = \frac{\sigma}{S} dN$$

Ahora (8) nos permite escribir la condición de normalización así,

$$\int_0^{\lambda} dx = 1$$

de donde, de manera sencilla, se obtiene la ecuación (6).

Por otra parte, algunos autores /17 y 18/, utilizan un procedimiento aparentemente ingenioso para deducir directamente la ecuación de Clausius, en que se prescinde de todo tipo de consideraciones en cuanto al solapamiento molecular, y a pesar de ello, se obtiene un resultado correcto. No obstante, un análisis más detallado de la situación pone al descubierto el error conceptual que, de modo sutil, se introduce en un punto crucial de la deducción, pues no es cierto que las partículas del haz tengan la misma probabilidad de chocar con las distintas moléculas blanco de un elemento de volumen Δx si su posición $x \neq 0$.

No queremos finalizar nuestro estudio sin antes referirnos a algo que por lo general, suele pasarse por alto a la hora de impartir la clase: la ecuación (6) no sólo constituye una primera aproximación del r.l.m. del gas ideal, sino que además, en ciertas circunstancias /19/, nos permite determinar, con gran exactitud, el recorrido libre medio de ciertas micropartículas a través de un gas; así, por una parte, el alumno conoce su carácter limitativo, mientras por la otra, adquiere plena conciencia de sus verdaderas posibilidades de aplicación.

CONCLUSIONES

Los resultados más significativos del presente trabajo son:

1. Se determina la expresión (5), de la cual se derivan, conjuntamente, la ecuación del recorrido libre medio de la molécula del gas ideal y la ecuación de Clausius de los recorridos libres.

2. Se demuestra que el número de moléculas solapadas en el intervalo $(0, \lambda)$, por muy enrarecido que se encuentre el gas, es un valor fijo y no despreciable. Esto refuta la idea de fundamentar la deducción de la ecuación del recorrido libre medio de la molécula, que prescinde de manera absoluta del

solapamiento molecular, en el estado de enrarecimiento del gas.

3. Se deduce e interpreta la expresión (8) que constituye el verdadero fundamento de la deducción anteriormente citada.

4. Se define operacionalmente el solapamiento molecular, encontrándose las magnitudes físicas de las que depende.

5. Se menciona un procedimiento aparentemente ingenioso, pero conceptualmente incorrecto, para deducir la ecuación de Clausius de los recorridos libres.

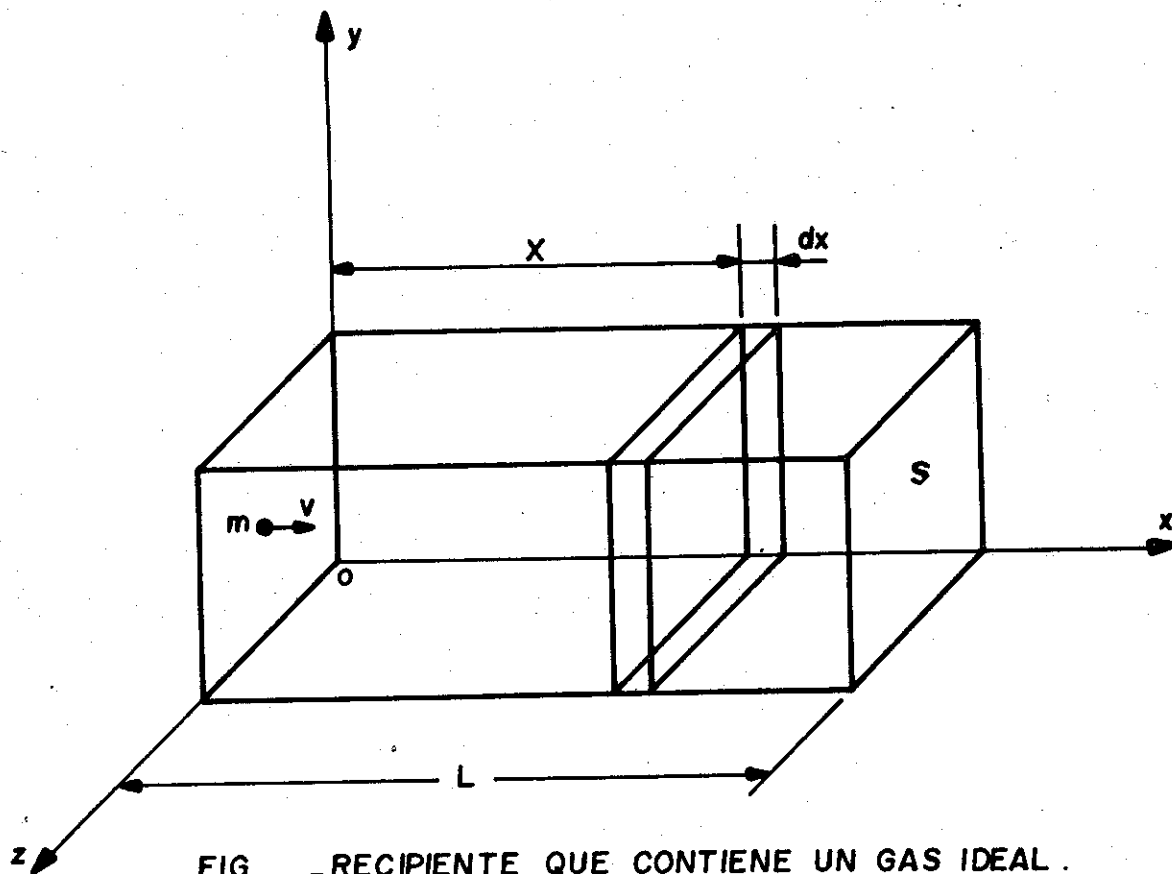


FIG. _RECIPIENTE QUE CONTIENE UN GAS IDEAL.

BIBLIOGRAFÍA

1. Brush, S.G.
Amer. J.Phys. 29,593 (1961)
2. _____
Am. Sci. 49,202 (1961).
3. Sommerfeld, A.
Lectures on Theoretical Physics. (Academic Press. London), Vol.V, ed. 1964.
4. Malherbe Roque, R.
Revista Cubana de Física. No.3, pág. 141, (1981).
5. Loeb., L.
Kinetic Theory of Gases. (Mc Graw Hill, New York), pág. 29, ed. 1934.
6. Ver referencia 5, pág. 43.
7. Ver referencia 5, pág. 37.
8. Resnick, R. y D.Halliday
Física. (Ed.Rev.La Habana). Parte 1. pág.687. ed. 1966.
9. Frish, S. y A.Timoreva
Curso de Física General. (Editorial Mir. Moscú) Tomo 1. pág.222. ed. 1967
10. Ruiz de Zárate, S.
Física Molecular y Termodinámica. (Inst.Cubano del Libro La Habana). pág. 324. ed. 1974.
11. Sears, F.W.
Introducción a la Termodinámica, Teoría Cinética y Mecánica Estadística. Editorial Reverté. Barcelona). pág. 237. ed. 1959.
12. Kikoin, I. y A.Kikoin
Física Molecular. (Editorial Mir. Moscú). ed. 1971.
13. Feynman, R.P.; R.B.Leighton y M.Sands
The Feynman Lectures on Physics. (Addison Wesley World). Vol.1, pág. 43-3 ed. 1967.
14. Ver referencia 13
15. Ver referencia 12, pág. 163.
16. Ver referencia 12, pág. 162-63.
17. Ingard U. y E.L.Kraushaar
Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas.

- (Editorial Reverté. Barcelona.), pág. 499. ed. 1966.
18. Kibble, T.W.B.
Mecánica Clásica. (Ediciones U.R.M.O.España.) pág.87.
ed. 1972.
19. Jeans, J.
An Introduction to the Kinetic Theory of Gases.
(Cambridge University Press. London.), pág. 44. ed. 1959.