REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. VI, No. 1, 1986

Solución asintótica del problema de difracción de ondas largas

C.Dr. Rafael Castro Galdames, Dpto. de Ecuaciones Diferenciales, Universidad de La Habana

RESUMEN

Este trabajo es la conclusión y generalización de una serie de investigaciones relacionadas con el estudio de propagación de ondas en capas de líquido heterogéneamente estratificadas. Aquí, nos ocupa el estudio de la propagación y difracción de ondas en una capa esférica de líquidos con regiones-obstáculos.

ABSTRACT

This paper is the conclusion and generalization of some investigations conected with the problem of wave propagation in layers of a stratified heterogeneus liquid. Here we study the propagation and difraction of waves in spheric layers of liquids with "obstacle-regions".

INTRODUCCIÓN

Se modelan los movimientos ondulatorios globales del océano en presencia de ciertos obstáculos cuyas paredes laterales son perpendiculares al fondo de la capa de líquido y que evidentemente representan los continentes e islas.

La solución rigurosa de este problema fue un sueño del académico L. N. Sretensky [1], quien en 1949 planteó este problema general y lo resolvió para el caso sencillo de un líquido ideal homogéneo sin la presencia de obstáculos. Para obtener las fórmulas asintóticas utilizó el método clásico de Poincaré, por lo que su trabajo, como es general en aquellos donde se aplica ese método, adolecía de rigurosidad en la valoración del término residual.

Los resultados aquí obtenidos concluyen una serie de trabajos comenzando por Gabov-Shatov-Sviechnikov [2] y posteriormente generalizada por el autor [3,4].

La vigencia de este trabajo está relacionada con el creciente interés en los problemas de conservación del medio y la utilización de los recursos marítimos.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $\mathcal{D}^+ \subset \Omega$ una región en la superficie de la esfera unitaria Ω acotada por la curva Γ de tipo Lyapunov, $\Gamma \equiv \partial \mathcal{D}^+ \in A^{(1,h)}$ [5] y $\mathcal{D}^-$ el complemento de $\mathcal{D}^+ \cup \Gamma$ hasta Ω.

Tómese $Q = Q_1 \cup Q_2$ como una capa de líquido, ideal de densidad en estado estacionario dependiente continuamente sólo de r es decir $\rho_0 = \rho_0(r)$, pero su derivada $\rho_0'(r)$ tiene una discontinuidad de 1er orden en $r = D$. Es conveniente distinguir en la capa Q dos sub-capas.
la exterior:

$$Q_1 = \{(r,\theta,\varphi) = (r,\omega) \in (D,A)\times\mathcal{D}^-\}$$

y la interior:

$$Q_2 = \{(r,\theta,\varphi) = (r,\omega) \in (B,D)\times\mathcal{D}^-\}$$

donde todas las magnitudes relacionadas con la primera capa serán designadas con el índice "1" y la segunda con el índice "2".

Estudiaremos los movimientos ondulatorios estacionarios de la capa Q dependientes del tiempo según la Ley $e^{i\sigma t}$

Sea $P_j(r,\omega)$ la amplitud de la presión dinámica en el líquido, $g(r)$ la aceleración gravitacional y $N_{0j}^2(r) = -g\,\rho_0'(r)/\rho_0(r)$ la frecuencia de Vaisala-Brant, entonces como en [4], la solución del sistema de ecuaciones hidrodinámicas [6], se reduce a la búsqueda de las funciones $P_j(r,\omega)$ en las capas Q_1, Q_2 de las ecuaciones:

$$(1)\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^2 r^2}{\sigma^2 - N_{0j}^2(r)}\,\frac{1}{\rho_0(r)}\,\frac{\partial}{\partial r}P_j\right] + \frac{1}{r^2\rho_0(r)}\Delta_\omega P_j = i\,\sigma\, f \qquad j=1,2$$

y condiciones de contorno

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial r}P_2(B,\theta,\varphi) = 0\;;\; \frac{\partial}{\partial r}P_1(A,\theta,\varphi) - \frac{\sigma^2}{g(A)}\left|1 - \frac{N_{0\,1}^2(A)}{\sigma^2}\right| P_1(A,\theta,\varphi) = 0$$

$$P_1(D,\theta,\varphi) = P_2(D,\theta,\varphi),\quad \frac{1}{\sigma^2 - N_{0\,1}^2(D)}\frac{\partial}{\partial r}P_1(D,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sigma^2 - N_{0\,2}^2(D)}\frac{\partial}{\partial r}P_2(D,\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} P_j(r,\omega)\Big|_{(r,\omega)\in[B,A]\times\Gamma} = 0 \qquad j = 1,2$$

Aquí n es la normal interna a la frontera Γ de la región $\mathcal{B}^+$ y $f(r,\omega)$ significa la densidad de las fuentes de vibraciones. La elevación de las ondas en la frontera libre $r = A$ se obtiene a partir de $P_1(r,\omega)$ según la fórmula

$$Z(\theta,\varphi) = P_1(A,\omega)/(g(A)\rho_0(A))$$

2 CONSIDERACIONES AUXILIARES

Haremos las siguientes consideraciones: 1) $\sigma^2 > N_{0j}^2(r)$, $j = 1,2$ lo que garantiza que la ecuación (1) sea elíptica.

2) el problema (1) - (2) tiene una solución única.

Denominemos por α las siguientes magnitudes:

$\alpha = \frac{h}{B}$ y $\alpha_1 = \frac{h_1}{B}$, donde $h = A-B$, $h_1 = D-B$; consideremos que $\alpha \to 0$. Nuestro objetivo será el estudio de la solución asintótica del problema (1) - (2) cuando $\alpha \to 0$. Es decir la asíntota cuando el grosor de la capa de líquido Ω tiende a cero.

Introduciendo la función adimensional $u_j(r,\theta,\varphi) = P_j(r,\theta,\varphi)/(\rho_0(A)g(A)h)$ y la variable $Z = (r-B)/B$; entonces el problema (1)-(2) puede ser escrito de la siguiente forma:

$$3)\quad \frac{\partial}{\partial Z}\left|K_j(Z)\frac{\partial u_j}{\partial Z}\right| + \eta(Z)\Delta_\omega u = q(Z,\omega) \text{ en } \Omega_{j\alpha},$$

$$4)\quad \frac{\partial}{\partial Z} u_2(0,\theta,\varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial Z} u_1(\alpha,\theta,\varphi) - \xi u_1(\alpha,\theta,\varphi) = 0$$

$$4)\quad K_1(\alpha_1)\frac{\partial}{\partial Z} u_1(\alpha_1,\omega) = K_2(\alpha_1)\frac{\partial}{\partial Z} u_2(\alpha_1,\omega) \; ; \; u_1(\alpha_1,\omega) = u_2(\alpha_1,\omega)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial n}\Big|_{(Z,\omega)\in[0,\alpha]\times} = 0, \quad |u_j| < \infty \; ; \; u_j(Z,\omega) = u_j(Z,\theta,\varphi+2\pi) \quad j = 1,2$$

Aquí $\Omega_\alpha = \Omega_{1\alpha} \cup \Omega_{2\alpha}$ donde $\Omega_j = \{(Z,\theta,\varphi): \alpha < Z < \alpha_1$ cuando $j = 1$ y $\alpha_1 < Z < 0$ cuando $j = 2$; $\omega = (\theta,\varphi) \in [0,\Pi]\times[0,2\pi)\}$ las funciones $K_j(Z)$, $\eta(Z)$, $q(Z,\omega)$ y la constante ξ se deducen correspondientemente de (1) - (2) donde $K_j(Z)$, $\eta(Z)$ y $\xi > 0$. Además supondremos que $K_j(Z)$, $\eta(Z) \in C^{(2)}[0,\alpha]$ a excepción del punto. $Z = \alpha_1$; $q(Z,\omega) \in C^{(0)}(\Omega\alpha)$.

Recordemos algunos resultados auxiliares sobre el problema de Sturm-Liuville en el intervalo $(0,\alpha)$ formuladas en [3,4]

$$(5)\quad \frac{d}{dZ}\left|K(Z)\frac{d\psi}{dZ}\right| = \lambda\eta(Z)\psi, \quad \psi'(0) = 0 \; ; \; \psi'(\alpha) - \xi\psi(\alpha) = 0$$

Lema 1. En caso de α suficientemente pequeños el problema (5) no tiene más de un número finito de valores propios positivos que pueden ser numerados en orden de decrecimiento.

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_N > 0 > \lambda_{n+1} > \dots > -\infty$$

Lema 2. Existe una sucesión no decreciente de números $\varkappa_n > 0$ tales que:

1) $\varkappa_n = 0(n)$, 2) $\varkappa_n$ no depende de α cuando $\alpha \in (0, \alpha_0]$, α_0 se define en el lema 1, 3) para todo $n \geqslant N+1$ los valores propios de (5) pueden ser acotados $|\lambda_n| \geqslant \varkappa_n^2/\alpha^2$.

Lema 3. Para las funciones propias normadas con peso $\eta(z)$ del problema (5) es válido la desigualdad:

$$\| \psi_n \|_{C^{(0)}[0,\alpha]} \leqslant C\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

cuando $n \geqslant N+1$, donde C no depende de α y n.

4 SOLUCIÓN

Para facilitar la escritura de las fórmulas que escribimos abajo vamos a considerar que la frontera Γ representa en forma paramétrica, donde el papel del parámetro S lo ocupará la longitud del arco de Ω. Como γ denotaremos la distancia entre los puntos $\omega(\theta,\varphi)$ y $\omega_1(\theta_1,\varphi_1)$ en Ω.

La solución del problema (3)-(4) puede representarse en forma de serie del sistema de funciones propias del problema (5):

(6) $u(z,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega)\,\psi_n(z)$, donde $Y_n(\omega)$ es la solución de:

(7) $\Delta_\omega Y_n + \lambda_n Y_n = q_n(\omega)$; $\left.\frac{\partial Y_n}{\partial n}\right|_{\omega\in\Gamma} = D$, $|Y_n| < \infty$, $Y_n(\theta,\varphi) = Y_n(\theta,\varphi+2\pi)$,

a su vez $q_n(\omega) = \int_0^{\alpha} q(z,\omega)\,\psi(z)\,dz$.

Mostraremos que el efecto principal en la representación asintótica de la función $u(z,\omega)$ lo ocupan los primeros N términos de la serie (6). Por eso ahora evaluaremos los términos de la serie (6) correspondientes a $n \geqslant N+1$.

5 SOLUCIÓN ASINTÓTICA

En [4] para $n \geqslant N+1$ fue mostrada la solución fundamental del operador diferencial del problema (7)

$$E_n(\gamma) = \frac{P_{\nu_n}(-\cos\gamma)}{4\cos(\frac{1}{2}+\nu_n)\pi}\ ;\ \nu_n = -\frac{1}{2} + i\sqrt{|\lambda_n| - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + i\,a_n$$

donde P_ν es la función de Legendre. Para ella, cuando α es suficientemente pequeño se cumple las siguientes valoraciones:

$$(8)\quad 0 < E_n(\gamma) < \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\ \frac{e^{-a_n\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \quad ; \quad 0 < \left|\frac{\partial}{\partial\gamma} E_n(\gamma)\right| < (1+a_n\gamma)\ \frac{1}{8\gamma}\ e^{-a_n\gamma}$$

donde $\gamma \in (0,\pi]$

La solución del problema (7) cuando $n \geqslant N+1$ puede ser escrito en forma de suma de potenciales.

$$(9)\quad Y_n(\omega) = \int_{-} E_n(\omega,\omega_1)q_n(\omega_1)d\omega_1 + \int_\Gamma E_n(\omega,\omega_1(s))\mu_n(s)ds = W_n(\omega) + V_n(\omega)$$

donde la densidad $\mu_n(s)$ se halla de la ecuación integral soluble [5,7]

$$(10)\quad \mu_n(s) + 2\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} E_n(\omega(s),\omega_1(\sigma))\mu_n(\sigma)d\sigma = -2\frac{\partial}{\partial n_s} W_n(\omega(s)) = X_n(s)$$

$$X_n(s) \text{ y } \mu_n(s) \in C^{(0,h)}(\Gamma)$$

Para la valoración de las funciones $Y_n(\omega)$ necesitaremos una serie de cotas.

Basado en la teoría de portencialidades [7] con la utilización del Lema 2 y la cota evidente

$\|q_n\|_{C^{(0)}(\bar{\ })} \leqslant \|q\|_{C^{(0)}(Q_\alpha)} \cdot \sqrt{\alpha}$ que se desprende del Lema 3 y la definición de la función q_n; para W_n puede obtenerse la valoración siguiente:

$$(11)\quad \|W_n\|_{C^{(0)}(\bar{\ })} \leqslant C\,\|q\|_{C^{(0)}(Q_\alpha)}\ \alpha^{5/2}/\varkappa_n^2\ , \quad n \geqslant N+1$$

donde se tuvo en cuenta que $\int_\Gamma E_n(\omega,\omega_1)d\omega_1 = |\lambda_n|^{-1}$

Aquí y en lo sucesivo las constantes C no dependen de α y η.

La parte derecha de la ecuación (10) basados en (8) y el lema 2 puede ser acotada de la siguiente manera:

$$(12)\quad \|X_n\|_{C^{(0)}(\Gamma)} \leqslant C\,\|q\|_{C^{(0)}(Q_\alpha)}\ \alpha^{3/2}/\varkappa_n .$$

Si utilizamos ahora, los métodos estandarizados en la teoría de potenciales [7] y la cota (8), podemos mostrar, que para la curva de tipo Lyapunov Γ con α suficientemente pequeños, la norma en $C^{(0)}(\Gamma)$ del operador integral en la ecuación (10) puede hacerse cuanto se quiera pequeña. De aquí utilizando la ecuación para la resolvente y (12) no es difícil obtener que:

$$(13)\quad \|\mu_n\|_{C^{(0)}(\Gamma)} \leqslant C\,\|X_n\|_{C^{(0)}(\Gamma)} \leqslant C\,\|q\|_{C^{(0)}(\Omega_\alpha)}\ \alpha^{3/2}/\varkappa_n$$

donde

$$\alpha \in (0,\alpha_0]$$

En virtud del principio del máximo para la ecuación (7) las cotas (8) y (3), cuando $n \geqslant N+1$, podemos obtener la valoración siguiente para el potencial de capa simple V_n :

$$\|V_n\|_{C^{(0)}(D^-)} \leqslant C\,\|q\|_{C^{(0)}(\Omega_\alpha)}\ \alpha^{5/2}/\varkappa_n^2$$

De arriba concluimos la siguiente valoración fundamental:

$$(14)\quad \|Y_n\|_{C^{(0)}(D^-)} \leqslant \|W_n\|_{C^{(0)}(D^-)} + \|V_n\|_{C^{(0)}(D^-)} \leqslant C\,\frac{\alpha^{5/2}}{\varkappa^2_n}\,\|q\|_{C^{(0)}(\Omega_\alpha)}$$

Ahora, utilizando la valoración (14) y el razonamiento, por ejemplo, seguido en [3] llegamos al siguiente teorema de valoración asintótica uniforme de la función $u(z,\omega)$.

Teorema 1 Bajo las condiciones arriba impuestas sobre las funciones $\eta(z)$, $K(z)$, $\Gamma \in A^{(1,h)}$ y α suficientemente pequeños es válida la cota

$$\|U - U_N\|_{C^{(0)}(\Omega_\alpha)} \leqslant C\,\|q\|_{C^{(0)}(\Omega_\alpha)}\ \alpha^2$$

donde $U_N = \sum_{n=1}^{N} Y_n(\theta,\varphi)\psi_n(z)$-N primeros términos de la serie (6) correspondientes a los valores propios positivos del problema (5)

6. ASÍNTOTA DE LA FUNCIÓN DE GREEN

Sea $S(\omega,\sqrt{\alpha})$ una bola de radio $\sqrt{\alpha}$ con centro en el punto ω en la esfera unitaria Ω. Introduzcamos en nuestro estudio el conjunto de pares de puntos ω y ω_1 denotado por $\mathfrak{M}_\alpha$ y tal que $\mathfrak{M}_\alpha = \{(\omega,\omega_1) \in \mathcal{D}^- \times \mathcal{D}^- : \gamma(\omega,\omega_1) \geqslant \sqrt{\alpha}$, $\mathcal{D}^+ \cap S(\omega,\sqrt{\alpha}) = \emptyset\}$.

Veamos también el siguiente funcional:

$$\|F(z,z_1,\omega,\omega_1)\|_\alpha = \sup_{z,z_1\in[0;\alpha]}\ \sup_{(\omega,\omega_1)\in\mathfrak{M}_\alpha} |F(z,z_1,\omega,\omega_1)|$$

Sea $G(z,z_1,\omega,\omega_1)$ la función de Green del problema (3)-(4) y $G_N = \sum_{n=1}^{N} \psi_n(z)\psi_n(z_1)\ g_n(\omega,\omega_1)$ donde g_n es la función de Green del problema (7) cuando $n = 1,\dots,N$.

Obsérvese que la condición de unicidad de la solución del problema (3)-(4) es equivalente a que λ_n (con $n = 1,2,\ldots,N$) no sea valor propio del problema (7). De lo antes dicho se deduce que bajo las condiciones arriba formuladas existe la función g_n.

Teorema 2 Bajo las condiciones arriba impuestas tiene lugar la valoración:

$$\| G - G_N \|_\alpha \leqslant C \exp (-\beta/\sqrt{\alpha})$$

donde

$$0 < \beta < \mathcal{H}_N.$$

7. CONCLUSIONES

El teorema 1 muestra que la función

$$U_N = \sum_{n=1}^{N} \psi_n(z) \int_0^\alpha \psi_n(z_1)\, dz_1 \int_{\mathcal{D}^-} g_n(\omega,\omega_1)\, q(z_1,\omega_1)\, d\omega_1$$

es la aproximación asintótica (uniforme) cuando $\alpha \to 0$ de la solución para la función de Green G fuera de una vecindad $\sqrt{\alpha}$ del punto ω_1.

La fuente puntual se supone situada en el punto $(z_1,\omega_1) \in Q_\alpha$.

Observación 1: Nótese que sobre las dimensiones de la región $\mathcal{D}^+$ (o $\mathcal{D}^-$) en comparación con la longitud de ondas, correspondientes a λ_n no se establece limitante alguna. Por eso, en casos límites, cuando la región $\mathcal{D}^\pm$ sea pequeña o grande en comparación con la longitud de ondas, pueden utilizarse las correspondientes fórmulas asintóticas para la función de Green $g_N(\omega,\omega_1)$

Observación 2: Ejemplos de estratificación concreta estudiados por el autor han mostrado la existencia de sólo un valor propio positivo del problema (5). Este resultado, al parecer, tiene un carácter general. Entonces para la construcción de las fórmulas asintóticas de la solución de (3)-(4) necesitaríamos conocer solamente la primera función propia y el primer valor propio de (5) cuyos métodos de determinación son bastante conocidos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Sretensky, L.N.
   Sobre las ondas producidas por una fuente submarina, situada bajo la superficie de una esfera (en ruso). I v. Akad Nauk (URSS). T. 13, No. 6, 1949.

2. Gabov, S.A.; A.K. Shatov y A.G. Sviechnikov
   Sobre la solución asintótica del problema de la difracción de ondas largas en la superficie de un líquido estratificado (en ruso) Differ ur. T. XVII, No. 10, 1981.

3. Castro, R.
   Solución asintótica del problema de ondas en una capa líquida estratificada heterogeneamente (en ruso) J.V.M. Akad Nauk (URSS). T. 256, No. 2, 1981.

4. Castro, R. y S.A. Gabov
Ondas establecidas en la superficie de una capa esférica de líquido estratificado en el caso que la frecuencia Vaisala-Brant resulte variable y continua por parte. Rev. Ciencias Matemáticas, U.H., Vol. V, No. 1, 1984.

5. Bitzadze, A.V.
Problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden (en ruso), Moscú, Nauka, 1966.

6. Whitham, G.B.
Linear and nonlinear waves. New York, 1974.

7. Guiunter, N.M.
Teoría de potenciales y su utilización en los problemas fundamentales de la físico-matemáticas, (en ruso) Moscú, Gostejizdat, 1953.