REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol.VI, No.2, 1986

Soluciones exactas de la ecuación no lineal del campo en la teoría de sexto orden y superior

Jorge A. González González
Universidad de Camagüey

RESUMEN

Con la ayuda del análisis cualitativo de la ecuación del campo, que se basa en la investigación de los puntos especiales de la misma, se deduce el comportamiento asintótico de la solución y en algunos casos se obtienen soluciones exactas (unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales).

INTRODUCCIÓN

En la teoría del campo "F^6" y en la teoría de las transiciones de fase /1/ se emplea la lagrangiana:

$$L = D\left[\frac{1}{C^2}|\dot{F}|^2 + |\nabla F|^2 - M^2|F|^2 + \frac{1}{2}P\ |F|^4 + \frac{1}{3}R\ |F|^6\right] \qquad (1)$$

de la cual resulta la ecuación:

$$\Delta F - \frac{1}{C^2}\ddot{F} - M^2 F + PF\ |F|^2 + RF\ |F|^4 = 0 \qquad (2)$$

F es la función del campo que puede ser compleja.

M,P,R,C,D son constantes.

Δ es el operador de Laplace.

Con un punto sobre la letra hemos indicado la derivada con respecto al tiempo.

En /1/ se hace una recopilación de trabajos donde se investigan ecuaciones de este tipo en sistemas unidimensionales.

Oleynik y el autor en /2/ investigaron la existencia de solitones en estos modelos bajo la acción de un campo externo y en sistemas de tres dimensiones

DESARROLLO DEL TEMA

En el presente trabajo estudiaremos ecuaciones generales del tipo:

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{df}{dr} + G_{(f)} = 0 \qquad (3)$$

$n = 1,2,3$ es la dimensión del espacio estudiado.

Supongamos que f_0 es un punto especial de la ecuación (3), es decir $G_{(f_0)}=0$ y que $G_{(f)}$ es analítica en este punto y en su vecindad.

Hagamos la transformación $f \rightarrow f_0 + f$ en (3), y obtengamos el desarrollo en serie de potencias de f. Tenemos

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{df}{dr} + S\,f^m + T_{(f)} = 0 \qquad (4)$$

$T_{(f)}$ es una serie donde las potencias de f tienen orden superior a m. Para hallar el comportamiento asintótico de la solución de (4) cuando $f \simeq 0$ basta con tener en cuenta el término de menor orden /3/.

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} + S\,f^m = 0 \qquad (5)$$

Si $m = 1, n = 1$ la solución es

$$f = c_1 e^{\sqrt{-S}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-S}\,r} \qquad (6)$$

Si $m = 1$, $n = 3$ la solución coincide con el potencial de Yukawa.

$f = \dfrac{c\,e^{-\sqrt{-S}\,r}}{r}$ (Aquí tenemos en cuenta sólo el exponente que decrece cuando r tiende a infinito)

Analicemos ahora el caso de los llamados puntos especiales compuestos /4/ cuando $\frac{dG}{df}(f_0) = 0$ y por lo tanto $m > 1$.

Busquemos la solución de (5) en la forma:

$$f = Ar^k \qquad (7)$$

Es evidente que si $k = \frac{2}{1-m}$, los términos se hacen homogéneos.

Sustituyendo en (5) es posible calcular A

$$A^{m-1} = \frac{2(nm - 2m - n)}{S(1-m)^2} \qquad (8)$$

Está claro que no para todos m,n,s existen soluciones reales. Si m es impar, entonces es necesario que la expresión (8) sea positiva. Por ejemplo, en el caso unidimensional (n = 1) tendríamos

$$A^{m-1} = -\frac{2(m+1)}{S(1-m)^2} \tag{9}$$

Y se hace obligatorio S < 0. Lo mismo ocurre en el caso n = 2.

Para n = 3 el resultado es aún más interesante:

$$A^{m-1} = \frac{2\,m-6}{S(1-m)^2} \tag{10}$$

porque si m=3, entonces no existen soluciones para ningún S de la forma (7) y si m > 3, S debe tomar valores positivos.

Préstese atención a que, según (7) y (8), para determinados parámetros el comportamiento asintótico de las soluciones en el caso unidimensional (donde es fácil obtener soluciones exactas) coincide con los casos bidimensional y tridimensional, lo que es posible sólo para m > 1.

Veamos ahora un caso particular

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} + af^3 + bf^5 = 0 \tag{11}$$

La ecuación (11) tiene tres puntos especiales $f_n = \pm(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}$, $f_0 = 0$, este último es compuesto (m = 3)

La solución de (5) que da el comportamiento asintótico de (11) cuando r tiende a infinito ($f \simeq 0$, $a < 0$) es

$$f = Ar^{-1},\ A^2 = \frac{n-3}{a} \tag{12}$$

Cuando $f \simeq \pm(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}$ la solución tiene las cualidades de (6) (n = 1).
En el caso de que a < 0, b > 0 serían senos y cosenos.
En el trabajo /2/ Oleynik y el autor utilizaron con éxito el siguiente resultado:

Si en el retrato de fase de la ecuación en el plano $(\frac{df}{dr}, f)$ existen dos puntos especiales cercanos, uno de ellos de tipo centro o foco (soluciones periódicas o cuasiperiódicas) y en el otro las trayectorias integrales entran asintóticamente (nudo, punto de ensilladura o cumpuesto) entonces existe al menos una solución de tipo "campana" /3/. Podemos buscar la solución de (11) como una función de tipo "campana" y con el comportamiento en el infinito r^{-1}.

Esta búsqueda es premiada, la función

$$f = \frac{Q}{(1+N\,r^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

Con $Q^2 = -\frac{3}{2}\frac{a}{b}$, $N = \frac{3}{4}\frac{a^2}{b}$ es la solución de (11) para $n = 1$

y con $Q^2 = -\frac{3a}{b}$, $N = 3\frac{a^2}{b}$ para $n = 2$.

En el caso tridimensional como (8) y (12) nos indican no debe existir solución de la forma (13) $(A = 0)$.

El acierto con (13) nos hizo investigar la función

$$f = Q(1 + Nr^2)^{-\frac{1}{I}}, \quad I = 1,2,3,4... \tag{14}$$

y resultó que satisface la ecuación

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{df}{dr} + af^{I+1} + bf^{2I+1} = 0 \tag{15}$$

si $Q^I = \frac{2(I+1)}{nI-2(I+1)}\frac{a}{b}$, $N = \frac{I^2(I+1)}{(nI-2(I+1))^2}\frac{a^2}{b}$

Esto permite comprobar las predicciones del método antes expuesto.

Un caso crítico de (15) es cuando $a = 0$. Para que exista solución de la forma (14) es necesario $nI - 2(I+1) = 0$ de donde resulta

$I = \frac{2}{n-2}$ y por tanto (utilizando (14)):

$$f = \frac{Q}{(1+N\,r^2)^{\frac{n}{2}-1}}, \quad N = \frac{I^2\,b}{4(I+1)}\,Q^{\,2I} \tag{16}$$

Esta solución fue obtenida en /5/ con otro método.

La ecuación del campo (2), por ejemplo, puede ser llevada a la forma (11) si se expresa F en variables separadas (la variable radial y el tiempo t)

$$F = f_{(r)}e^{iwt} \tag{17}$$

Recordando que $\left|e^{iwt}\right| = 1$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ obtenemos

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \left(\frac{w^2}{c^2} - M^2\right)f + Pf^3 + Rf^5 = 0 \tag{18}$$

Podemos escoger a w tal que $w = CM$

Utilizando el resultado (16) no es difícil calcular la solución para el caso $P = 0$:

$$F = \frac{Q}{(1+\frac{R}{3}Q^4r^2)^{\frac{1}{2}}}\,e^{iCMt} \tag{19}$$

CONCLUSIONES

Las soluciones de tipo (17) localizadas, tridimensional y esféricas son utilizadas en la teoría del campo para describir partículas elementales.

Casi siempre se han utilizado /1,2/ soluciones que se comportan en el infinito como el potencial de Yukawa (estas serían partículas con interacción de corto alcance). La función (19) puede describir partículas con interacción de largo alcance).

Si F es escalar podemos expresar la solución de (2) y similares como

$$F = f_{(r)}, \text{ donde } r^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2$$

y obtendremos igualmente una ecuación del tipo (3). Las soluciones encontradas por nosotros (14) describirían ondas no lineales localizadas que se desplazan a lo largo del eje x con una velocidad constante v.

Si el sistema es homogéneo con respecto a z ó y, entonces las ondas pueden ser bidimensionales o unidimensionales.

AGRADECIMIENTO

El autor agradece los comentarios críticos y sugerencias del Dr. C.V.P. Oleynik de la Universidad de Odessa, URSS.

BIBLIOGRAFÍA

1. Makhankov, V.G.
   Solitones en sistemas no integrables.
   Phys. Rev. Vol. 35, pág. 1, 1978.

2. González, J.A., V.P.Oleynik
   Transiciones de fase de primer tipo bajo la acción de un campo externo.
   Forum científico de la Universidad de Odessa. 1984. (en ruso)

3. Bautin, N.N., et al.
   Métodos de la teoría cualitativa de investigación de sistemas dinámicos en el plano.
   Moscú. Nauka. 1976. (en ruso)

4. Gilmore, R.
   Teoría de las catástrofes aplicada.
   Moscú. MIR. 1984. (en ruso)

5. Gidas, B., et al.
   Simetría y propiedades relativas al principio del máximo.
   Commun. Math. Phys. 68, pág. 209-243. 1979.