REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. VI, No.2, 1986

Corrimiento de Lamb de los niveles energéticos de los átomos hidrogenoideos.

Valeri Nechet y Roberto Pérez Rosell
Instituto Superior Pedagógico "Frank País García"

RESUMEN

En el trabajo se simplifican las expresiones generales del corrimiento del nivel energético y del desdoblamiento de las radiaciones de dos niveles del átomo hidrogenoideo.

En los cálculos se utilizan los desarrollos parciales de los propagadores electrónicos y fotónicos de Coulomb en la representación de coordenadas, y para la escritura de sus funciones radiales se utiliza una misma integral paramétrica.

En los últimos años ha aumentado considerablemente el interés de los físicos en cuanto al problema del cálculo preciso del campo de Coulomb en los cómputos de los diferentes efectos de la radiación en la teoría relativista del átomo (ver por ejemplo /1/). Los métodos tradicionales de la electrodinámica cuántica que están relacionados con la utilización de la representación de impulso han conllevado a grandes éxitos en los cálculos de los efectos de la radiación en el campo de Coulomb solamente para $Z_\alpha << 1$. Cuando $Z_\alpha \sim 1$ los cálculos en la representación del impulso se hacen mucho más complejos y son inadecuados incluso con la utilización de computadoras potentes.

Por eso, a partir de los finales de los años 50 se comenzaron a desarrollar los métodos cuántico-electrodinámicos de cálculos en la representación de coordenadas, fundamentadas en la utilización de una expresión precisa para la función relativista coulombiana de Green para el electrón (propagador coulombiano del electrón). El valor práctico de la utilización del propagador se revela solamente cuando existen expresiones explícitas suficientemente cómodas para este.

En este trabajo se utiliza una expresión compacta obtenida en el trajo /2/ del propagador coulombiano para el problema del corrimiento de Lamb de los niveles energéticos de los átomos hidrogenoideos.

La expresión del propagador coulombiano del electrón $G(\vec{r}, \vec{r}'/E)$ se presenta en forma de desarrollo parcial según los multipolos del electrón virtual.

$$G(\vec{r}, \vec{r}'/E) = \sum_{j\ell m} \begin{bmatrix} G + W_1 , & i F + W_2 \\ i F - W_3 , & G - W_4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Las funciones angulares se expresan mediante los espinores esféricos

$$W_1 = \Omega_{j\ell m}(\vec{n})\Omega^+_{j\ell m}(\vec{n}') ; \; \vec{W}_2 = - W_1 \vec{\sigma}\, \vec{n}' ; \; W_3 = - \vec{\sigma}\, \vec{n}\, W_1 ; \; W_4 = \vec{\sigma}\, \vec{n}\, w\, \vec{\sigma}\, \vec{n} . \tag{2}$$

Las funciones radiales $G^{\pm}(r,r')$ y $F^{\pm}(r,r')$ se pueden presentar mediante la integral paramétrica /2/:

$$\left(G^{\pm}, F^{\pm}\right) \frac{1}{\sqrt{r\, r'}} \int_1^{\infty} \frac{\alpha\, \xi}{\sqrt{\xi^2-1}} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{i\nu} e^{ik\xi(r+r')}\, G^{\pm}, F^{\pm} \tag{3}$$

cuyo núcleo contiene la combinación de las funciones de Besseel:

$$G^{\pm} = \frac{1}{2\gamma_N}\left[(m \pm E)(\gamma_N \pm \varkappa_N) \pm i\, Z\alpha\, K\xi\right] . I_{|2\gamma_N+1|}\left(-2\, i\, K \sqrt{r.r'(\xi^2-1)}\right) + (\gamma_N \rightarrow -\gamma_N)$$

$$F^{\pm} = \frac{1}{2\gamma_N}\left[Z\, \alpha(m \pm E) + i\, K\, \xi(\varkappa_N \pm \gamma_N) \mp K^2 r'(\xi^2-1)\right] . \, 1_{|2\gamma_N+1|} + (\gamma_N \longrightarrow \gamma_N) \tag{4}$$

$$K^2 = \sqrt{E^2 - m^2} \; ; \; \nu = \frac{Z\, \alpha\, E}{K} \; ; \; \gamma_N = \sqrt{N^2 - (Z\, \alpha)^2} \; ; \; \varkappa_N = 2(\ell - j)N \; ; \; N = j + 1/2$$

La escritura del propagador coulombiano en la forma (1) - (4) es más cómoda según nuestra opinión para la realización de los cálculos concretos. La suma según j en la fórmula (1) no se puede realizar; sin embargo, el desarrollo parcial del propagador permite utilizar las reglas de selección para el momento y la paridad, lo que simplifica considerablemente la solución de los problemas relacionados con el campo coulombiano.

Simplifiquemos la expresión general de orden α para el corrimiento del nivel energético del átomo hidrogenoideo (aquí no se considera el aporte de la polarización del vacío).

$$\Delta E = -\frac{i\,e^2}{2\pi} \int_{(F)} d\,w \int d\,\vec{r} \int d\,\vec{r}\,'\ \psi(r)\,\gamma_\mu\, G(\vec{r},\vec{r}\,'/E-W)\,\gamma_\mu\,\psi(\vec{r}\,')\,\mathcal{D}(\vec{r},\vec{r}\,'/w) \qquad (5)$$

donde $\psi(F)$ es la función de onda relativista del electrón ligado en el estado considerado, con una energía E; W es la energía del fotón virtual $\mathcal{D}(\vec{r},\vec{r}/w)$ es la función de Green del fotón (Propagador fotónico).

Las variables radiales se separan completamente de las espín angulares, si se utiliza el desarrollo parcial del propagador de Coulomb (1) - (2) y del propagador fotónico.

$$\mathcal{D}(\vec{r},\vec{r}\,'/w) = \sum_{LM} \mathcal{D}_L(\vec{r},\vec{r}\,')\ Y_{LM}(\vec{n})\ Y_{LM}(\vec{n}\,') \qquad (6)$$

después de lo cual las integrales angulares se calculan de una forma trivial.

Escribiendo ahora las funciones radiales $\mathcal{D}_L(r,r')$ del propagador fotónico en forma análoga a la representación paramétrica de las funciones radiales del propagador electrónico (3)

$$\mathcal{D}_L(r,r'/w) = \frac{1}{\sqrt{r,r}} \int_1^\infty \frac{d\,\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}\ e^{i\,w\eta(r+r')}\ I_{2L+1}\left(-2iw\sqrt{rr'(\eta^2-1)}\right) \qquad (7)$$

obtenemos el siguiente desarrollo multipolar para el corrimiento del nivel:

$$\Delta E = -\frac{i\,e^2}{2\pi} \int_{(F)} d\,w \int_1^\infty \frac{d\,\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} \int_1^\infty \frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{i\nu} \int_0^\infty d\,r \int_0^\infty d\,r'(r\,r')\ e^{i(K\xi+w\eta)(r+r')}\,.$$

$$\cdot \sum_{j\ell} \frac{2j+1}{4\pi} \sum (2L+1) \Big\{ \left[gg'\mathcal{G}_+ - ff'\mathcal{G}_- + gf'\mathcal{F}_1 + fg'\mathcal{F}_- \right] Y_+ +$$

$$+ \left[ff'\mathcal{G}_+ - gg'\mathcal{G}_- - fg'\mathcal{F}_+ - gf'\mathcal{F}_- \right] Y_- + 2gg'\mathcal{G}_- K_{\bar{\ell},\ell_0} -$$

$$- 2ff'\mathcal{G}_+ K_{\ell,\bar{\ell}_0} \Big\} \cdot I_{2L+1}\left(2iw\sqrt{rr'(\eta^2-1)}\right)$$

donde $g \equiv g(r)$ y $f \equiv f(r)$ son las funciones radiales, j_0, ℓ_0, $\bar{\ell}_0$ son los números cuánticos del estado estudiado, y los factores

$$Y \pm = \begin{pmatrix} j & L & j_0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \frac{1 \pm (-1)^{L+\ell+\ell_0}}{2}\ ; \quad K_{\ell_1,\ell_2} = \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \qquad (9)$$

garantizan la conservación del momento y la paridad, como resultado de lo cual la suma según L en la fórmula (8) se realiza entre límites finitos.

Además resulta que la utilización de representaciones paramétricas del mismo tipo (3) y (7) para las funciones radiales de los propagadores permite calcular también en forma analítica las integrales radiales en la (8): Esto se expresa mediante las funciones hipergeométricas de dos variables F_4 (ver por ejemplo, /3/). Las integrales paramétricas exigen un procesamiento con computadoras. Cada término de la suma (8) diverge en la región $w >> m$ y debe ser renormado. En los trabajos /4/ fue desarrollada la técnica de las renormalizaciones para la expresión (5) la cual resultó ser bastante compleja.

La expresión (8) permite simplificar la técnica de la renormación de ΔE.

Por otra parte, los métodos anteriormente expuestos del calculo de ΔE permiten realizar prácticamente la idea de Kroll y Lamb. /5/ teniendo en cuenta con exactitud el campo coulombiano: se calcula no el corrimiento del nivel energético separado, sino el desdoblamiento de radiación de dos niveles o sea propiamente el corrimiento de Lamb, $\Delta E_L = \Delta E(2S_{\frac{1}{2}}) - \Delta E(P_{\frac{1}{2}})$. La expresión para ΔE_L se escribe en en forma análoga a (8); sin embargo, ahora cada término del desarrollo multipolar a diferencia de (8) es finito o sea, tenemos otro camino para realizar la renormación.

BIBLIOGRAFÍA

/1/. Braun, MaA; A.D.Gurchumelitz
Y.U.Safranova. Teoría Relativista del Atomo M."NAUKA" 1984
p 272.

/2/. Granovsky, Y.I.; V.I.Nechet.
Física y Matemática, 1974 t.18 p 262

/3/. Beitmen, G.; A.Herdein
Funciones trascendentes Superiores. M. Nauka 1965.

/4/. Mohr, P.Y.
Ann. Phys. 1974, v 88 p.26; p 52

/5/. Kroll, N.M.; W.E.Lamb.
Phys. Rev. 1949 v 75 p.338.