REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. VII, No. 1, 1987

Ondas planas en líquidos giratorios y compresibles y relaciones de dispersión

José Marín Antuña, Universidad de La Habana

RESUMEN

En la actualidad, en relación con las necesidades de la práctica es cada vez mayor el interés por el estudio de las propiedades dinámicas de líquidos de diversa naturaleza, en particular de los líquidos giratorios. En el presente trabajo se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden para describir los procesos oscilatorios bidimensionales en líquidos giratorios y compresibles.

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \frac{\omega^2}{c^2}u\right] - \omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ,$$

donde c es la velocidad del sonido en el líquido y ω es el duplo de la velocidad angular del líquido que gira alrededor del eje Oz. $\nabla_2^2 = \partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$ y la función $u=u(x,z)$ no depende de la coordenada y. La ecuación es satisfecha por la presión dinámica p del líquido y por las componentes del vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ de la velocidad de las partículas del líquido.

En el trabajo se estudian las soluciones del tipo de ondas planas y se obtiene una relación de dispersión para las mismas con conclusiones de interés. Se obtiene, además, una expresión para la velocidad de grupo de dichas ondas, la que se analiza en dependencia de la dirección de propagación de las mismas.

1. ECUACIÓN DE LAS ONDAS BIDIMENSIONALES

Supongamos que tenemos un líquido ideal compresible que ocupa todo el espacio. Consideraremos que el líquido es homogéneo y que gira con velocidad angular $\omega/2$ alrededor de un eje vertical. Referiremos el estudio de los procesos en este líquido a un sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) que gira junto con el líquido de forma tal que el eje Oz coincida con el eje de rotación.

El sistema de ecuaciones hidrodinámicas que describe al líquido es:

- La ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{f} = 0 \tag{1}$$

donde $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ es el vector de la velocidad de las partículas del líquido, p es la presión, ρ la densidad del líquido y $\vec{f}$ las fuerzas que actúan sobre el líquido por unidad de masa.

- La ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{2}$$

- La ecuación de estado termodinámico

$$p = p(\rho,s), \tag{3}$$

donde s es la entropía de la partícula líquida.

Si denotamos por

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \tag{4}$$

entonces, tomando la derivada substancional de (3) respecto al tiempo tendremos:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s =$$

$$= c^2\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho\right] \equiv c^2\frac{d\rho}{dt}, \tag{5}$$

donde c^2 es ya una función dada de p y ρ, y c tiene el sentido de la velocidad del sonido en el medio. Teniendo en cuenta (5), la ecuación (2) puede escribirse como

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} + \rho(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = 0 \tag{6}$$

Por otra parte, en la ecuación de Euler (1) la fuerza $\vec{f}$ está compuesta por dos sumandos $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$. Por $\vec{f}_1$ entenderemos la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga que aparecen a consecuencia de la rotación del líquido debido al sistema de coordenadas elegido:

$$\vec{f}_1 = -2\,\frac{\vec{\omega}}{2} \times \vec{v} - \vec{\nabla}\left[\frac{\omega^2}{4}\,\frac{x^2+y^2}{2}\right] \qquad (7)$$

En $\vec{f}_2$ consideraremos la fuerza de la gravedad dirigida hacia abajo:

$$\vec{f}_2 = -g\vec{\nabla}Z$$

Por consiguiente, la ecuación de Euler toma la forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left[p + g\rho z + \rho\frac{\omega^2}{4}\,\frac{x^2+y^2}{2}\right] + \vec{\omega} \times \vec{v} = 0.$$

La presión del líquido sumada a la presión de la fuerza de gravedad y a la presión de la fuerza centrífuga será denominada presión dinámica del líquido y si la representamos por la misma letra p:

$$p = p + g\rho z + \rho\,\frac{\omega^2}{4}\,\frac{x^2+y^2}{2}\,,$$

entonces la ecuación de Euler (1) adopta la forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}p + \vec{\omega} \times \vec{v} = 0. \qquad (8)$$

Es obvio que la ecuación (8) es no lineal y por consiguiente la teoría exacta de los procesos en el líquido será una teoría no lineal. Sin embargo, nos limitaremos aquí al estudio de fenómenos lineales, es decir, consideraremos que las perturbaciones en el líquido son en cierto sentido pequeñas, y por lo tanto que la ecuación (3) puede ser linealizada en relación con estas perturbaciones. En la ecuación (8) el miembro no lineal es el término inercial $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$. Si v_0 es la amplitud de la velocidad, γ la frecuencia de la onda y k el número de onda tendremos que

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \gamma v_0 \quad , \quad (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \sim k v_0^2$$

Por consiguiente, la relación entre estos términos será

$$\varepsilon = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} = \frac{k v_0^2}{\gamma v_0} = \frac{v_0}{c_f}\,, \qquad (9)$$

donde $c_f = \gamma/k$ es la velocidad de fase de la onda. ε se denomina parámetro de no linealidad. Para la aproximación lineal supondremos que $\varepsilon \ll 1$, es decir, que la velocidad de las partículas del líquido en la onda es mucho menor que la velocidad de fase de la onda. Entonces en (8) podemos despreciar el término inercial y obtener:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}\,p = 0, \qquad (10)$$

que junto con (6) forman el sistema de ecuaciones que describen las oscilaciones pequeñas del líquido que gira alrededor del eje Oz con velocidad angular $\omega/2$.

En este líquido estudiaremos los llamados movimientos bidimensionales, definiendo como tales aquellos para los cuales $\partial p/\partial y = 0$, $\partial \vec{v}/\partial y = 0$. Consideraciones físicas y geométricas permiten afirmar que dichos movimientos son posibles sólo en dominios que tengan la forma de cilindros infinitos con generatrices paralelas al eje Oy.

El sistema de ecuaciones (6)-(10) para el caso de movimientos bidimensionales y considerando $\rho=1$ para simplificar la notación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \omega v_y + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{11a}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \omega v_x = 0 \tag{11b}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{11c}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11d}$$

El sistema (11) es de cuatro ecuaciones diferenciales con cuatro incógnitas v_x, v_y, v_z, p. Colocando (11b) en (11a) obtenemos

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \omega^2 v_x + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = 0 \tag{11a'}$$

Derivando (11d) respecto a t tres veces, obtenemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 v_x}{\partial t^3 \partial z} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^3 \partial z} = 0 \tag{12}$$

Colocando en (12) $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}$ de (11a'), obtenemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \omega^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^3 \partial z} = 0 \tag{13}$$

Derivando (11d) respecto a t dos veces y respecto a z una vez, queda

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^3 \partial z} = - \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial z^2} \tag{14}$$

Al colocar (14) en (13) obtenemos

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_2^2 p - \omega^2\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial t\,\partial x} = 0 \tag{15}$$

Por último, de (11d) se obtiene con facilidad

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t\,\partial x} = -\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial t\,\partial z}\,, \tag{16}$$

y de (11c) también es fácil obtener que

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t\,\partial z} = -\ p\ [illegible] \,. \tag{17}$$

Colocando (17) en (16) y ésta en (15), obtenemos para la presión dinámica la ecuación

$$L[p] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla_2^2 p + \frac{\omega^2}{c^2}\,p\right] - \omega^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{18}$$

Operando convenientemente con las ecuaciones (11) no es difícil comprobar que la misma ecuación es satisfecha por las componentes v_x, v_y, v_z del vector de la velocidad de las partículas del líquido: $L[v_i] = 0$ con $i=x,y,z$.

Denominaremos a (18) ecuación de las ondas bidimensionales en el líquido giratorio y compresible. Es obvio que integrar (18) equivale a integrar el sistema (11). Como se aprecia, la ecuación (18) es una ecuación diferencial no clásica de cuarto orden en derivadas parciales. Ella puede escribirse en la forma:

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Box u + \frac{\omega^2}{c^2}\,u\right] - \omega^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{18a}$$

Se ve que dentro de los corchetes figura el operador de Klein-Gordon. La ecuación (18) puede escribirse como

$$L[u] = \Box\, T[u] + \omega^2 u_{zz} = 0, \tag{18b}$$

donde $\Box = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_2^2$ es el operador de D'Alembert y $T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2$ es un operador temporal.

De aquí se aprecia que si $\omega = 0$ (el líquido no gira), el operador L adquiere la forma $L = \Box\,\partial^2/\partial t^2$ y por consiguiente la solución deberá coincidir con la solución de la ecuación de onda bidimensional. Lo dicho permite concluir que como resultado de la rotación del líquido en la ecuación aparecen términos que tienen en cuenta esta rotación y por consiguiente las soluciones deberán reflejarla en forma de una dependencia de la velocidad angular ω. Además, debe esperarse que las soluciones deban reducirse a las soluciones conocidas de propagación de ondas en un medio compresible para $\omega \to 0$.

2. RELACIONES DE DISPERSIÓN

A fin de simplificar la notación consideremos en lo adelante $c = 1$. Entonces la ecuación (18) se escribe de la forma

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \omega^2 u\right] - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (19)$$

Propongamos a (19) una solución del tipo

$$u = u_0 \exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \gamma t)\} , \qquad (20)$$

donde $\vec{k} = (k_1, k_3)$ es el vector de onda, $x=(x,z)$ y γ es la frecuencia de la onda. Sustituyendo (20) en (19), obtenemos

$$\gamma^2(\gamma^2 - \omega^2) - \gamma^2 k^2 + \omega^2 k^2 \cos^2\theta = 0 , \qquad (21)$$

donde θ es el ángulo que forma el vector de onda $\vec{k}$ con el eje Oz (con la dirección del vector de velocidad angular del líquido). La expresión (21) es la relación de dispersión de las ondas planas en el líquido giratorio y compresible. De (21) se obtiene

$$k = |\gamma| \sqrt{\frac{\omega^2 - \gamma^2}{\omega^2\cos^2\theta - \gamma^2}} \qquad (22)$$

La relación (22) nos permite concluir la diferencia sustancial que existe entre la propagación de ondas planas armónicas en un líquido giratorio y la propagación de dichas ondas en un líquido en reposo. Para $\omega \to 0$ obtenemos la recta $k = |\gamma|$, es decir, la relación conocida de las ondas planas. Además, se observa que en dependencia del valor del ángulo θ (de la dirección del vector de onda k) el cuadro cambia cualitativamente.

Efectivamente, en el caso en que el vector de onda $\vec{k}$ sea paralelo al eje de rotación del líquido, la relación de dispersión (22) se transforma en la expresión $k = |\gamma|$ lo que significa que en la dirección del eje Oz se propagan ondas planas con cualquier frecuencia γ, incluyendo la onda tipo escalón ($\gamma=0$). Para las ondas planas armónicas con vector de onda $\vec{k}$ inclinado ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) se obtiene que no para todo valor de γ pueden propagarse las ondas. Efectivamente, se ve que existe una zona prohibida para la frecuencia $\gamma(\omega \cos\theta < \gamma < \omega)$.

Por último, en el caso en que el vector $\vec{k}$ sea perpendicular al eje de rotación del líquido ($\theta = \frac{\pi}{2}$) se obtiene que se propagarán solamente aquellas ondas para las cuales la frecuencia γ sea mayor que el duplo de la velocidad angular ω.

Derivando (21) podemos hallar la velocidad de grupo de las ondas:

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2-\omega^2-k^2} \left\{k_1, \frac{\gamma^2-\omega^2}{\gamma^2} k_3\right\} \tag{23}$$

Por otra parte, la velocidad de fase de la onda plana es

$$\vec{c} = \vec{v}_f = \frac{\gamma}{k} \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\gamma\vec{k}}{k^2} = 1 \tag{24}$$

De la expresión (23) para la velocidad de grupo pueden sacarse las siguientes conclusiones. En primer lugar, para el líquido en reposo ($\omega=0$) y teniendo en cuenta que entonces $k^2=\gamma^2$ se obtiene que

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\gamma} \vec{k} \equiv \vec{v}_f \tag{25}$$

Es decir, la velocidad de grupo coincide con la velocidad de fase, no hay dispersión y la energía se propaga en la dirección del vector $\vec{k}$.

En segundo lugar, en general para $\omega\neq 0$ la dirección de $\vec{v}_g$ (la dirección de propagación de la energía) no coincide con la dirección del vector $\vec{k}$; tiene lugar la dispersión de las ondas.

En el caso en que la dirección de $\vec{k}$ coincida con el eje de rotación Oz, es decir, para $\theta=0$, como $k_1=0$, $k_3=k$, $k^2=\gamma^2$, para la velocidad de grupo tendremos:

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2-\omega^2-\gamma^2} \left\{0, \frac{\gamma^2-\omega^2}{\gamma^2} k\right\} = \frac{1}{\gamma} \vec{k} \equiv \vec{v}_f \tag{26}$$

Es decir, de nuevo las ondas se propagan sin dispersión. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ bajo la condición de propagación de las ondas $\gamma > \omega$ y en virtud de que de (22) en este caso $k = \sqrt{\gamma^2-\omega^2}$, tendremos para la velocidad de grupo

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2-\omega^2-\gamma^2+\omega^2} \{k, 0\} = \frac{1}{\gamma} \vec{k} \tag{27}$$

En tanto que de (24)

$$\vec{v}_f = \frac{\gamma}{\gamma^2-\omega^2} \vec{k} \,. \tag{28}$$

Esto significa que $v_g < v_f$ y tiene lugar una dispersión normal. Esto se corresponde con el hecho de que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ $k = \sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ por lo que las ondas se dispersan. Para $|\gamma| < \omega$ tiene lugar la absorción de las ondas que se propagan en el sentido perpendicular al eje de rotación Oz.

Los resultados aquí obtenidos coinciden con los trabajos [1-2] en los que son calculadas las expresiones analíticas de las soluciones de los problemas sobre la excitación de ondas planas armónicas por paredes oscilantes sumergidas en el líquido y colocadas respectivamente en posición horizontal y vertical.

BIBLIOGRAFÍA

1. Marín, J.

Sobre una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible. Revista Cubana de Física, Vol. IV, Nº 3, 1984.

2. Marín, J.

Sobre la excitación de ondas en un líquido giratorio y compresible. Revista de Ciencias Matemáticas, La Habana, tomo VI, Nº 1, 1985.