REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. VII, No. 2, 1987

# Difracción de ondas planas en líquidos giratorios y compresibles.

José Marín Antuña. Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de La Habana

RESUMEN

En el presente trabajo se continúa la investigación teórica sobre la propagación y difracción de ondas bidimensionales publicada en otros artículos. En este caso se estudia la difracción de una onda armónica plana, que viaja a lo largo del eje perpendicular al eje de rotación del líquido, en una pared vertical semiinfinita. El análisis cualitativo del resultado obtenido permite asegurar la validez del modelo construido para este tipo de problemas.

ABSTRACT

In the present work the theoretical investigation of propagation and diffraction of bidimensional waves published in other papers is continued. In this case the diffraction of an harmonical plane wave traveling in the direction of the axis perpendicular to the axis of rotation of the liquid in a vertical half-infinite wall is studied. The qualitative analysis of the obtained result permits to affirm the validity of the constructed model for this kind of problem.

## 1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con lo establecido en [1-2], a lo largo de un eje perpendicular al eje de rotación de un líquido, puede propagarse una onda armónica plana con frecuencia $\gamma$ mayor que el duplo de la velocidad angular del líquido, medida en unidades de velocidad del sonido: $\gamma > \alpha$. En [1-5] fue obtenida una ecuación para describir los procesos ondulatorios bidimensionales en líquidos giratorios y compresibles

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \alpha^2 u\right] - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1}$$

donde u puede ser tanto la presión dinámica del líquido, como las componentes del vector de la velocidad de las partículas del líquido y $\alpha$ es el duplo de la velocidad angular del líquido. $\nabla_2^2$ es el laplaciano respecto a las variables $x_1$ y $x_3$, y el líquido gira con velocidad $\alpha/2$ alrededor de un eje vertical a lo largo del cual está dirigido el eje $Ox_3$ del sistema de coordenadas $(x_1, x_3)$ que gira junto con el líquido. En los citados trabajos también fueron estudiados algunos procesos de difracción de ondas en barreras semiinfinitas sumergidas en el líquido. En el presente trabajo se obtiene una solución analítica para el problema de la difracción de una onda armónica plana en una barrera de ese tipo en el caso en que la onda viaje en una dirección perpendicular al eje de rotación del líquido y la barrera se encuentre colocada a lo largo del eje de rotación del mismo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Supongamos que en un líquido ideal homogéneo y compresible que ocupa todo el espacio $R^2$ y que gira con velocidad angular $\alpha/2$ alrededor de un eje vertical, se encuentra sumergida una pared semiinfinita. Asociemos los movimientos bidimensionales [4] del líquido al sistema de coordenadas cartesianas $(x_1, x_3)$ que gira con el líquido de forma tal que el eje $Ox_3$ está dirigido a lo largo del eje de rotación; la pared semiinfinita entonces será $\Gamma=\{(x_1, x_3) \in R^2 : x_1= 0,\ x_3 \geq 0\}$. Supongamos que sobre $\Gamma$ incide, viajando a lo largo del eje $Ox_1$, la onda

$$u_0(x_1,t) = \theta(t-x_1)\, e^{i(\gamma t - x_1\sqrt{\gamma^2-\alpha^2})}, \quad \gamma > \alpha \tag{2}$$

Representando el campo ondulatorio completo por

$$U(x,t) = u_0(x_1,t) + u(x,t) \tag{3}$$

para el campo difractado $u(x,t)$ obtenemos el problema

$$\begin{aligned} &L[u] = 0 \ \forall\, x \in R^2\setminus\Gamma,\ t > 0, \\ &\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t<0} = 0,\ k = 0, 1, 2, 3, \\ &u\big|_\Gamma = -\theta(t)\, e^{i\gamma t} \end{aligned} \tag{4}$$

Por su sentido físico $U(x,t)$ describe la componente en el eje $Ox_1$ del vector de velocidades de las partículas del líquido.

Propongamos la solución del problema (4) en la forma

$$u(x,t) = - w_1(x,t) - i\gamma \int_0^t e^{i\gamma(t-\tau)} w_1(x,\tau)d\tau + + 2\int_0^t d\tau \int_0^\infty \mu(s,t-\tau)W(x-y(s),\tau)ds, \tag{5}$$

donde

$$w_1(x,t) = 2\int_0^\infty W(x-y(s),t)ds \tag{6}$$

y

$$W(x,t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\theta(t-|x|)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\cos\left[\alpha\frac{1}{|x|}\sqrt{t^2-|x|^2}\right] \tag{7}$$

es la solución singular generalizada de la ecuación (1); $y(s)=(0,s)$, $|x|^2 = x_1^2 + x_3^2$, $\theta(t)$ es la función paso unitario de Heaviside [1-5].

La solución propuesta satisface la ecuación y las condiciones iniciales del problema (4); exijamos que cumpla la condición en la frontera. Entonces para la función $\mu(s,t)$ obtenemos la ecuación integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t d\tau\int_0^\infty \mu(s,t-\tau)\frac{\theta(\tau-|x_3-s|)}{\sqrt{\tau^2-|x_3-s|^2}}ds = -\theta(t)e^{i\gamma t} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\theta(t-|x_3-s|)}{\sqrt{t^2-|x_3-s|^2}}ds + + \frac{i\gamma}{\pi}\int_0^t d\tau\int_0^\infty e^{i\gamma(t-\tau)}\frac{\theta(\tau-|x_3-s|)}{\sqrt{\tau^2-|x_3-s|^2}}ds \tag{8}$$

Con vistas a resolver la ecuación (8), apliquémosle la transformada de Laplace. Como resultado obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty M(s,p)K_0(p|x_3-s|)ds = -\frac{1}{p-i\gamma} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_0(p|x_3-s|)ds + + \frac{i\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{p-i\gamma}K_0(p|x_3-s|)ds, \tag{9}$$

donde $M(s,p) \doteq \mu(s,t)$. Consideraremos que las funciones $\mu(s,t)$ y $M(s,p)$

cumplen las siguientes condiciones en el entorno de s=0:

$$|\mu(s,t)| < \frac{C(t)}{\sqrt{s}}, \quad |M(s,p)| < \frac{C(p)}{\sqrt{s}}$$

De (9) es fácil obtener la ecuación

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \overline{M}(s,p)K_0(p|x_3-s|)\,ds = -\frac{1}{p-i\gamma}, \tag{10}$$

donde

$$\overline{M}(s,p) = M(s,p) - \frac{p}{p-i\gamma}. \tag{11}$$

La ecuación (10) es una ecuación integral de Wiener-Hopf [6] que en su estructura es idéntica a la obtenida en [3-5] para la difracción del paquete de Bessel. Por consiguiente, no repetiremos los cálculos para resolverla, sino que escribiremos directamente su solución:

$$\overline{M}(s,p) = -\frac{p}{p-i\gamma}\left[\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} + \phi(\sqrt{ps})\right] \tag{12}$$

De aquí teniendo en cuenta (11), obtenemos

$$M(s,p) = -\frac{p}{p-i\gamma}\left[\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} - \mathrm{Erfc}(\sqrt{ps})\right], \tag{13}$$

donde

$$\mathrm{Erfc}(x) = 1 - \phi(x), \quad \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi.$$

Teniendo en consideración [7] que

$$\frac{p}{p-i\gamma} \equiv 1 + i\gamma\mathcal{L}\{e^{i\gamma t}\}, \quad \frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} - \mathrm{Erfc}(\sqrt{ps}) \doteq \frac{1}{\pi}\frac{\theta(t-s)}{t\sqrt{s}}\sqrt{t-s},$$

obtenemos, finalmente, para la función $\mu(s,t)$ la expresión

$$\mu(s,t) = \eta(s,t) + i\gamma e^{i\gamma t} * \eta(s,t) \tag{14}$$

donde $*$ denota la convolución en el tiempo, y

$$\eta(s,t) = -\frac{1}{\pi}\frac{\theta(t-s)}{t\sqrt{s}}\sqrt{t-s} \tag{15}$$

Así pues, la solución del problema (4) viene dada por el potencial (5), donde la función $\mu(s,t)$ está dada por las fórmulas (14)-(15). Hagamos un análisis cualitativo de la solución obtenida. En virtud de la identidad [7]:

$$e^{-x_1\sqrt{p^2+\alpha^2}} \equiv \sqrt{p^2+\alpha^2}\int_{x_1}^{\infty} J_0\left(\alpha\sqrt{\tau^2-x_1^2}\right)e^{-p\tau}\,d\tau \tag{16}$$

no es difícil comprobar que

$$\theta(t-x_1)\,e^{i\left(\gamma t-x_1\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\right)} \doteqdot \frac{1}{p-i\gamma}\,e^{-x_1\sqrt{p^2+\alpha^2}}, \tag{17}$$

en tanto que de [3-5] es fácil obtener que

$$w_1(x,t) + i\gamma\, e^{i\gamma t} * w_1(x,t) \doteqdot \frac{1}{p-i\gamma}\,e^{-x_1\sqrt{p^2+\alpha^2}} \tag{18}$$

De lo dicho podemos concluir que el cuadro de difracción estudiado es el que se describe a continuación. Para un instante $t > 0$ toda la región $R^2\backslash\Gamma$ queda dividida en los dominios siguientes: La región I limitada por las semi rectas $\{x_1= - t, x_3> 0\}$ , $\{x_1= t, x_3< 0\}$ y la semi circunferencia $\{|x|=t,\ x_3< 0\}$; la región II cuya frontera está formada por la semi recta $\{x_1= -t,\ x_3> 0\}$, la pared $\Gamma$ con $x_3> t$ y el cuarto de circunferencia $\{|x|=t,\ -t < x_1< 0,\ 0 < x_3< t\}$ y, por último, la región III formada por el círculo interior $|x| < t$. En el dominio I el campo ondulatorio completo $U(x,t)$ se expresa sólo por la onda incidente $u_0(x,t)$. En la región II el campo ondulatorio tiene la forma de la superposición de la onda incidente y la onda reflejada en la barrera $\Gamma$:

$$U(x,t) = \theta(t-x_1)\,e^{i\left(\gamma t-x_1\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\right)} + \theta(t+x_1)\,e^{i\left(\gamma t+x_1\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\right)}$$

En esta región no se manifiesta la difracción de la onda incidente sobre el borde de la barrera $\Gamma$. Hagamos notar que el último sumando en la expresión (5) que contiene la función $\mu(s,t)$ es diferente de cero sólo en el interior del círculo $|x|<t$ (dominio III) y nos da el aporte fundamental al cuadro de difracción, el cual resulta estar concentrado en dicho círculo. Por último, en el resto del espacio considerado el campo completo $U(x,t)$ es idénticamente nulo.

Como era de esperar, el proceso de difracción obtenido es cualitativamente igual al que se obtiene, por ejemplo, al estudiar el proceso de difracción de ondas planas acústicas en una pared vertical descritas por la ecuación clásica de ondas.

## BIBLIOGRAFÍA


1. Gabov, S.A., J.Marín

   Sobre un problema no estacionario de difracción de ondas en un líquido giratorio y compresible. Vestnik Moskov. Universit., serie 3, Física-Astronomía, 1985, tomo 26, No.3, 16-20.

2. Marín, J.

   La exitación de ondas en un líquido giratorio y compresible. Revista de Ciencias Matemáticas, La Habana, tomo VI, No.1/85.

3. Gabov, S.A., J.Marín

   Una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible y problemas de difracción. Zhurnal Vichis. Matem. y Matem. Fiziki, tomo 25, 1985. No.6,873-882.

4. Marín, J.

   Sobre una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido girato-rio y compresible. Revista Cubana de Física, 1984, No.3, Vol.IV, 63-75.

5. Marín, J.

   Sobre la difracción de ondas en un líquido giratorio y compresible. Revista de Ciencias Técnicas, Físicas y Matemáticas, Academia de Ciencias de Cuba, No.6, 1985.