REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol.VIII, No.1, 1988

70 años de la Teoría General de la Relatividad (II)

Fidel Castro Díaz-Balart y Roberto Cabezas Solórzano

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza un análisis de la teoría que constituye una generalización de la relatividad especial para los sistemas de referencia no inerciales y que además sirvió de base a la astrofísica moderna; la teoría general de la relatividad. Se exponen los antecedentes que condicionaron su surgimiento, los resultados principales de la misma, el estado actual de la comprobación experimental y sus aplicaciones. Se presentan además algunos elementos del aparato matemático de la TGR para facilitar la concatenación lógica de los resultados y sus consecuencias.

ABSTRACT

This article analyzes the theory that constitutes a generalization of special relativity for noninertial systems of reference, which also served as a basis for modern astrophysics: the general theory of relativity. The situation that led to its discovery, its main results, the present state of experimental verification and its applications are presented, as are some elements of the mathematical formalism of the general theory of relativity, to facilitate the logical interrelationships between its results and consequences.

INTRODUCCIÓN

Desde la creación de la teoría especial de la relatividad Einstein trabaja vigorosamente en la generalización de dicha teoría para el caso de los sistemas no inerciales de referencia. Los problemas de la TER se funden indisolublemente con el problema de la masa y la gravitación y justamente a los diez años de la teoría de la relatividad restringida Einstein crea una teoría en la cual se ven recíprocamente condicionadas las propiedades del espacio y el tiempo, por un lado, y las propiedades de la masa y la gravitación, por otro. Esta teoría fue denominada teoría general de la relatividad y es, al mismo tiempo, la teoría de la gravitación que toma en cuenta el principio de la relatividad.

El objetivo del presente trabajo es, siguiendo la misma concepción del primero sobre la TER, realizar un balance de la obra einsteniana concerniente a la teoría general de la relatividad, destacando los antecedentes que condicionaron su surgimiento, los resultados principales y el estado actual de la comprobación experimental y sus aplicaciones. En el trabajo no se desarrolla el aparato matemático que fundamenta la TGR. El mismo puede encontrarse en numerosas monografías, citadas en los artículos I y II, y en los trabajos originales de Einstein, no obstante, se dan algunos elementos y las principales ecuaciones que sustentan la teoría para facilitar la concatenación lógica de los resultados y sus consecuencias.

ASPECTOS FÍSICOS QUE FUNDAMENTAN LA TGR

Las ideas físicas que descansan en los fundamentos de la TGR fueron formuladas por Einstein inmediatamente después de la creación de la TER. Ya en 1907, analizando los procesos físicos en un sistema no inercial, él estableció que en estos sistemas no es posible dar la misma definición de la medición del tiempo (simultaneidad) que fue dada para el caso de sistemas inerciales, debido a que, en un sistema no inercial, el tiempo varía de un punto a otro y él depende de la aceleración en un elemento dado del espacio, es decir, del potencial gravitacional.

En sus investigaciones físicas, Einstein partió del hecho que la geometría depende directamente de los procesos físicos y, por ello, no representa una forma de descripción elegida por conveniencia a la cual la física debía adaptarse. Las leyes de la geometría, desde este punto de vista, deben considerarse como leyes físicas integrales. Es decir, en la TGR no existe una geometría y una cinemática independiente de los procesos físicos, ya que las propiedades de las escalas y los relojes se determinan por el campo gravitacional y es este campo, expresado a través de las componentes de los potenciales, el que representa el estado físico del espacio, el cual define simultáneamente, como dijera Einstein |1|, "la gravitación, la inercia y la métrica".

El principio de la equivalencia fue descubierto por Einstein cuando intentaba introducir la gravitación en los marcos de la TER y chocó con el hecho notable de la igualdad de las masas inercial y gravitacional, es decir, la equivalencia entre la magnitud que caracteriza las propiedades inerciales del cuerpo y la magnitud que caracteriza las propiedades del cuerpo como fuente de gravitación. Sobre la base de este principio, Einstein llega a la conclusión sobre la variación de la velocidad de los procesos físicos en el campo gravitacional, en particular demuestra el desplazamiento de la frecuencia de emisión del átomo en la superficie del sol y predice la dependencia de la velocidad de la luz con respecto al potencial de gravitación mediante la fórmula

$$c = c_0 (1 + \Phi/c^2)$$

donde Φ es el potencial escalar de Newton y c_0 la velocidad de la luz en ausencia del campo gravitacional.

Esta fórmula muestra una particularidad interesante de la velocidad de la luz en la TGR: a diferencia de la TER, ella deja de ser una magnitud constante, llegando a alcanzar valores diferentes a 300,000 km/s en dependencia de la magnitud del potencial de gravitación.

El próximo eslabón en la cadena de razonamientos hallado por Einstein, en 1912, fue la formulación cuadridimensional de las ecuaciones de movimiento de un punto material en el campo estático, la cual coincide por su forma con las ecuaciones de movimiento de un punto material libre en la TER, pero con la velocidad de la luz dependiente de las coordenadas:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{-c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0 \qquad (1)$$

donde $c = c(x,y,z)$. La generalización del principio de relatividad que se deduce de aquí significa la existencia de una clase de transformaciones de coordenadas más amplia que el grupo de Lorentz, las cuales en presencia del campo gravitacional estático deben dejar invariante la ecuación ( ).

Para ello el intervalo ds^2 toma la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \quad , \qquad (2)$$

$g = g\ (x^1, x^2, x^3, x^4)$ es el denominado tensor métrico.

Einstein demostró que la descripción de la acción del campo gravitacional sobre los procesos materiales es posible establecer ecuaciones covariantes con respecto a las transformaciones arbitrarias de coordenadas. De la invariabilidad de ds se deduce que el tensor g_{ik} que no es más que el potencial gravitacional, constituye un tensor covariante de segundo rango. Esto significa que el campo gravitacional a través de g_{ik} influye sobre las dimensiones de los cuerpos y sobre los relojes de cierta forma, según una determinada métrica del espacio tiempo.

De esta forma, Einstein deduce que la geometría del espacio tiempo al igual que el campo gravitacional se define por el tensor g_{ik} y toma la estructura de Riemann. Así obtuvo una expresión exacta la idea sobre el espacio no euclideano. Un aspecto importante de la teoría es que Einstein subrayó con énfasis la validez local de la TER.

Posteriormente el aparato matemático desarrollado por Christoffel, Ricci y otros, mediante el cual se obtuvo un cálculo diferencial independiente del sistema de coordenadas que permitía dar una forma invariante a las ecuaciones de la física matemática, fue utilizado por Einstein para obtener la ley de conservación de la energía y el impulso en forma diferencial de cierto sistema material caracterizado por el tensor energía impulso en presencia del campo gravitacional. De esta forma Einstein representa las ecuaciones de Maxwell en forma de covariancia general, es decir en esta nueva representación, la forma de las mismas sería invariante con respecto a cualquier transformación de las coordenadas espacio - temporales. En 1915 fueron finalmente formuladas las ecuaciones del campo gravitacional obteniendo como resultado una teoría de covariancia general y en 1916 Einstein publica su obra capital |2| en la que la teoría se expone en forma definitiva y armoniosa.

Lo relevante en esta teoría es que ella misma fue elaborada por Einstein de forma puramente deductiva y posteriormente ha sido comprobada mediante observaciones astronómicas. La TGR es una teoría que precedió a su tiempo en varias décadas. Fue sólo con el desarrollo de la astrofísica moderna y el estudio del cosmos que ésta alcanzó su confirmación y plenitud.

En los fundamentos de la TGR descansa el principio de equivalencia, según el cual un sistema no inercial de referencia es equivalente a un determinado campo gravitacional.

En un sistema no inercial el intervalo ds^2 representa cierta forma cuadrática general de las diferenciales de las coordenadas (ver fórmula (2)), donde g_{ik} es una función de las coordenadas espaciales y la coordenada del tiempo X^1, X^2, X^3 y X^4.

Los componentes del tensor determinan la métrica del espacio tiempo y las mismas son simétricas con respecto a los índices i y k, por lo que en general existen diez diferentes magnitudes de g_{ik}.

Obsérvese que en el caso particular del sistema inercial:

$$g_{44} = -1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1\ ;\quad g_{ik} = 0,\ i \neq k\ ,$$

y el intervalo coincide con el intervalo de la TER visto. Este se denomina galileano. Es importante señalar que las propiedades geométricas del espacio tiempo (su métrica) se determinan pos los fenómenos físicos y no constituyen propiedades invariables del espacio y el tiempo.

En el caso general de un campo gravitacional variable la métrica del espacio es no sólo no euclideana, sino también varía en el tiempo. Esto significa que las relaciones entre las diferentes distancias geométricas varían con el tiempo. Como resultado obtenemos que en la TGR no es posible la inmovilidad entre los sistemas de los cuerpos.

Esta situación hace variar el propio concepto de sistema de referencias en la TGR con relación al que se tenía en la TER. En la TER el sistema de referencias representa un conjunto de cuerpos en reposo, uno con respecto al otro. Bajo la acción del campo gravitacional variable estos sistemas no existen y para la determinación exacta de la posición de la partícula en el espacio, es necesario tener un conjunto de un número infinito de cuerpos que llenan todo el espacio de forma similar a un determinado "medio"*.

Dicho sistema junto a los relojes relacionados con este sin sincronización , representa el sistema de referencias en la TGR. Debido a la arbitrariedad en la elección del sistema de referencias, las leyes de la naturaleza deben describirse de una forma común en cualquier sistema cuadridimensional de coordenadas, es decir, en forma covariante.

Para la formulación de la TGR es necesario la generalización de la teoría de los invariantes y la teoría de los tensores; surge el problema relacionado con la forma de las ecuaciones covariantes con respecto a una transformación puntual arbitraria. El cálculo tensorial generalizado fue desarrollado por la matemática antes de la TGR. Riemann fue el primero que llevó las ideas de Gauss al continuo de un número arbitrario de dimensiones, prediciendo el significado físico de esta generalización de la geometría euclideana. Después ocurrió el desarrollo de la teoría en forma de cálculo tensorial, gracias a los trabajos de Ricci y Levi-Civita. Einstein demostró, como ya dijimos, que el postulado general de la relatividad conlleva a la covariancia de los sistemas de ecuaciones de la física con respecto a cualquier transformación de coordenadas.

Ahora bien, ¿cómo pueden obtenerse semejantes ecuaciones con covariancia general? Consideremos seguidamente este problema puramente matemático. La idea principal de esta teoría de magnitudes covariantes consiste en lo siguiente. Supongamos que ciertos objetos (tensores) están definidos con respecto al sistema de coordenadas mediante un cierto número de funciones espaciales que denominaremos componentes del tensor. Entonces existen determinadas reglas a través de las cuales estas componentes se calculan para el nuevo sistema de coordenadas, si ellas son conocidas para el sistema inicial y si se conoce la transformación que enlazan ambos sistemas. Los tensores se caracterizan además porque las ecuaciones de transformación para sus componentes son lineales y homogéneas. Por ello todas las componentes en el nuevo sistema se igualan a cero si las mismas son nulas en el sistema inicial. En correspondencia con esto, si cualquier ley de la naturaleza se formula como la igualdad a cero de todas las componentes de cierto tensor, entonces la misma presentaría covariancia general. Investigando las leyes de formación de los tensores, obtenemos, de esta forma, un procedimiento para el establecimiento de las leyes de covariancia general. Veamos pues, brevemente los momentos más importantes del cálculo tensorial en que descansa la TGR.

---

* En la teoría a dicho medio se le denomina materia . Es preciso señalar que en este caso y en lo sucesivo se entiende por materia , no el concepto filosófico definido Lenin |3|, sino la sustancia interestelar.

Se denominan componentes del vector contravariante A^{ν} a las magnitudes definidas como funciones de x_{ν} en cada sistema de coordenadas que se transforman al pasar de un sistema a otro, como las diferenciales de las coordenadas

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\gamma}} A^{\gamma} .$$

De forma similar, los vectores covariantes se transforman por la Ley:

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} B_{\nu} ,$$

No es difícil comprobar que el producto de dos vectores covariantes y contravariantes es un escalar:

$$\phi = B_{\nu} \cdot A^{\nu} , \qquad \text{(suma por } \nu \text{)} .$$

Se denomina tensor de segundo orden, a la magnitud cuyas componentes en el paso de un sistema a otro se transforman por la ley:

$$A^{\nu'}_{\mu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \cdot \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} A^{\beta}_{\alpha} .$$

Los tensores pueden formarse por medio de la suma de tensores de igual rango, por medio del producto de tensores:

$$A^{\nu}_{\mu} \cdot B_{\sigma\tau} = C^{\nu}_{\mu\sigma\tau}$$

o por medio de la contracción de dos índices de diferentes caracteres:

$$A^{\mu}_{\mu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau} .$$

Los tensores pueden también formarse mediante diferenciación, esto se denomina diferenciación covariante. Por ejemplo: la derivada covariante de los vectores A^{ν} y A_{ν} se simbolizan por $A^{\nu}_{;\mu}$ y $A_{\nu;\mu}$ y se definen:

$$DA^{\nu} = A^{\nu}_{;\mu}\, dx^{\mu} \quad , \quad DA_{\nu} = A_{\nu;\mu}\, dx^{\mu} ,$$

donde

$$A^{\nu}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} \cdot A^{\sigma} ; \quad A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \cdot A_{\sigma} ,$$

aquí $\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}$ es el símbolo de Christoffel. En las coordenadas cartesianas, $\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} = 0$ y la derivada covariante se transforma en derivada común. El sentido físico de estos símbolos será tratado más adelante en el análisis de la ecuación de la geodésica.

En las coordenadas curvilíneas, la traslación paralela de un vector de un punto del espacio a otro, dependen del camino elegido, es decir, que si trasladamos el vector A^μ del punto A al punto B y nuevamente regresamos al punto A en trayectoria cerrada, el vector A^μ va a sufrir una variación ΔA^μ (en su dirección pero no en su magnitud). Esta variación puede determinarse si se define el tensor de curvatura o tensor de Riemann $R^\mu_{\sigma\alpha\beta}$ |4|:

$$2\Delta A^\mu = - R^\mu_{\sigma\alpha\beta}\, A^\sigma\, f^{\alpha\beta} \quad , \tag{3}$$

donde $f^{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico de segundo rango que caracteriza la magnitud y la orientación del elemento de superficie limitado por la curva, y

$$R^\mu_{\sigma\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\mu_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\Gamma^\mu_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} \quad . \tag{4}$$

La expresión (3) muestra el carácter tensorial de $R^\mu_{\sigma\alpha\beta}$.

En las coordenadas curvilíneas, por tanto, la traslación paralela de un punto material de un lugar a otro deja de ser una línea recta, describiéndose por una geodésica, la cual representa la trayectoria más corta entre dos puntos del espacio curvo. La ecuación de la misma se expresa:

$$\frac{d^2x_\mu}{dS^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\ \frac{dx_\alpha}{dS} \cdot \frac{dx_\beta}{dS} = 0 \quad . \tag{5}$$

Esta ecuación describe el movimiento de un punto material que se encuentra bajo la acción de un campo gravitacional. En este caso $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ juega el papel de intensidad del campo gravitacional. En el caso límite de ausencia del campo gravitacional, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ es igual a cero y la ecuación (5) se transforma en la ecuación de una línea recta. De aquí se deduce el sentido físico de los símbolos de Christoffel, los cuales reflejan la desviación de la trayectoria del punto material con respecto al movimiento rectilíneo uniforme. En el caso en que la velocidad del punto material sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz, obtenemos la ecuación del movimiento de Newton.

Intentemos ahora hallar las leyes del campo gravitacional.

Las ecuaciones del campo gravitatorio, se pueden obtener a partir del principio de mínima acción

$$\delta(S_m + S_g) = 0 \quad ,$$

donde S_g y S_m son las acciones del campo gravitatorio y de la materia, respectivamente. Calculemos la variación δS_g. La función de acción del campo gravitatorio se expresa a través de la curvatura escalar del espacio cuadridimensional R de la forma siguiente /5/:

$$S_g = \int \sqrt{-g}\, d\Omega \quad ,$$

donde R se define como $R = g^{ik}R_{ik}$ y R_{ik} es el tensor de Ricci, el cual no es más que la contracción del tensor de Riemann R^{j}_{ikj} con respecto a dos de sus índices.

En coordenadas curvilíneas el producto $\sqrt{-g}\, d\Omega$ se comporta como invariante en la integración de un cuadrivolumen. La magnitud $\sqrt{-g}$, como consecuencia del carácter hiperbólico del continuo espacio-temporal, tiene siempre valor real.

Entonces:

$$\delta S_g = \delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega \quad ,$$

notando que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\, \delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik} \quad , \tag{6}$$

encontramos

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}R)\, \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega \; +$$

$$+ \int g^{ik}\, \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega \quad , \tag{7}$$

utilizando el teorema de Gauss puede demostrarse que el último término es igual a cero.

Por otra parte, puede demostrarse que la variación de la acción correspondiente a la materia tiene la forma |5|:

$$\delta S_m = \frac{X}{2c} \int T_{ik}\, \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega \quad , \tag{8}$$

donde T_{ik} es el tensor energía impulso de la materia (incluido el campo electromagnético (ver fórmula 3 del artículo I).

El principio de mínima acción nos conduce, por lo tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones (7) y (8), a la igualdad:

$$\delta (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R + XT_{ik})\, \delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega = 0 \quad , \tag{9}$$

de donde, dada la arbitrariedad de la δg^{ik}:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}R = XT_{ik} \quad , \tag{10}$$

estas son las ecuaciones fundamentales de la teoría de la relatividad conocidas como ecuaciones de Einstein.

X es una constante adimensional igual a $1,86.10^{-27}$.

Esta ecuación en forma de covariancia general expresa la idea acerca de que la distribución y el movimiento de cualquier forma de materia genera la curvatura del espacio tiempo. En la parte derecha de la ecuación de

Einstein se encuentra la densidad de distribución de las fuentes: el tensor de energía-impulso T_{ik}, calculado en la TER, donde están incluidos todos los tipos de energía excepto la gravitacional; esta última de forma implícita se considera en la parte izquierda de las ecuaciones (10) a través de la curvatura escalar R y del tensor de Ricci. En la actualidad se ha obtenido un gran número de soluciones de ésta ecuación. Entre estas, las más importantes en el sentido de posiblidad de comprobación experimental constituyen las conocidas soluciones de Schwartzschild y de Friedman. La primera fue obtenida por Schwartzschild en 1916 para el caso del campo gravitacional simétrico central. El análisis posterior de ésta solución condujo a la predicción acerca de la posible existencia de "los huecos negros". El segundo tipo de solución fue obtenida por Friedman para el caso no estacionario, considerando la densidad de la materia en el universo homogénea e isotrópica. El modelo de Friedman resultó ser una buena aproximación a la estructura del universo.

Consideremos seguidamente el problema de la longitud de las reglas y la marcha de los relojes en la TGR. Según el principio de equivalencia las relaciones métricas de la geometría euclideana se cumplen en un sistema de coordenadas cartesianas de dimensiones infinitamente pequeñas que se encuentra en el correspondiente estado de movimiento (caída libre sin rotaciones). Esta afirmación es cierta para sistemas locales de coordenadas que presentan una pequeña aceleración con respecto a este último y por tanto, para los sistemas de coordenadas en reposo con respecto al sistema elegido. Para el intervalo de tiempo entre dos sucesos cercanos en tal sistema local tenemos:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dT^2 = dS^2 - dT^2 \tag{11}$$

donde dS se mide mediante una regla y dT mediante relojes en reposo con respecto a este sistema.

Por otra parte, para dS^2 es conocida la expresión a través de las coordenadas x_ν utilizadas en las regiones finitas en un sistema arbitrario de coordenadas (ver ecuación (2).

Para llegar a un criterio sobre la variación de las dimensiones de un cuerpo y la marcha de los relojes en los sistemas no inerciales de referencia es necesario obtener una relación entre las diferencias de coordenadas en el sistema galileano y las coordenadas en el sistema arbitrario de referencia. Esto lo podemos lograr igualando las expresiones del intervalo en uno y otro sistema dadas por las ecuaciones (10) y (2).

Para ello, tendremos en cuenta que $g_{\mu\gamma}$ puede descomponerse, con una exactitud del primer orden, en |4|:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{12}$$

aquí

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \mu = \nu \\ 1 & \text{Si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

En el sistema elegido $\gamma_{\mu\nu}$ toma la forma:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{X}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r} \; ; \; \gamma_{44} = \frac{X}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r} \quad , \tag{13}$$

donde es la densidad de la sustancia en estado de reposo.

Entonces, sustituyendo las expresiones (12) y (13) en (2) obtenemos:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{X}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) - \left(1 - \frac{X}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) c^2\, dt^2 \quad ,$$

e igualando finalmente las expresiones (11) y (2) llegamos a las relaciones buscadas:

$$\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \left(1 + \frac{X}{\delta\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\cdot\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad ,$$

$$dT = \left(1 - \frac{X}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) cdt. \tag{14}$$

Por consiguiente en el sistema de coordenadas elegido, con una exactitud de primer orden, la regla de medición unitaria tiene una longitud de

$$1 - \frac{X}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r} \quad .$$

Cualquiera sea el sistema de coordenadas elegido, las leyes de configuración de las reglas rígidas no coincidirán con las leyes de la geometría euclideana. En otras palabras, no es posible elegir un sistema de coordenadas en el cual las diferencias de coordenadas correspondientes a los extremos de la regla de medición unitaria arbitrariamente elegida, cumpla siempre con la relación

$$\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \Delta X_3^2 = 1 \quad .$$

En este sentido el espacio no resulta ser euclídeano, sino curvo.

De la fórmula (14) se deduce que al intervalo de tiempo entre dos sucesos ($dT = 1$) en las unidades convenidas en nuestro sistema de coordenadas, con la exactitud señalada, le corresponde el tiempo

$$1 + \frac{X}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r} \quad ,$$

en correspondencia con esto, los relojes marcharán más despacio mientras mayor sea la masa de la sustancia que se encuentra en la cercanía de los mismos.

La comprobación experimental de la TGR es considerada un problema actual de la física contemporánea y de la astronomía. Ella se lleva a cabo en dos direcciones: la primera, relacionada con los fundamentos de la teoría y la segunda, con la comprobación de las consecuencias de la TGR. La primera dirección se refiere al principio de equivalencia en el cual la misma está fundamentada. Está claro que cualquier violación del principio de equivalencia significaría la inconsistencia de la TGR o en último caso indicaría sus fronteras de aplicabilidad. De aquí se comprende la gran atención que se le presta a la comprobación de la igualdad entre las masas inercial y gravitacional. Ya en los años 20 fueron publicados los resultados de los experimentos de Eötvos que indicaban la igualdad $m_i = m_g$ con una exactitud de 10^{-9} |6|, y ya en 1971 se alcanzó una exactitud de 10^{-12} |7|.

Desde los primeros años que fue formulada la TGR, ya Einstein señalaba tres efectos notables que podían servir para la comprobación de la teoría: el desplazamiento gravitacional de las líneas espectrales, la desviación de los rayos luminosos en el campo del sol y el desplazamiento del perihelio de Mercurio*.

Han pasado desde entonces más de medio siglo y aún el problema de la comprobación experimental de la TGR se encuentra en el centro de la atención Esto se debe, fundamentalmente, a que aunque todos los efectos mencionados por Einstein existen y se observan, la exactitud alcanzada no es aún la suficientemente alta. En el caso del desplazamiento gravitacional de la frecuencia el error de las mediciones es aproximadamente uno por ciento y el propio efecto no es sensible a la forma del campo gravitacional.

La desviación de los rayos de luz en el campo del sol, el cual según la TGR alcanza, 1,75 grados al pasar un rayo cerca del disco del sol, se ha medido solamente con un error del orden del 10%, aunque en estos límites converge con la TGR. El desplazamiento del perihelio de Mercurio se conoce con alrededor de un 1% y la convergencia de la teoría con las observaciones de este efecto se ha considerado, como la confirmación más exacta de la TGR después de la exactitud de los datos sobre la igualdad de las masas gravitacional e inercial.

Como señalara el académico Migdal |8|"...si en los límites del Sistema Solar se lograra detectar aunque sea una mínima desviación de las predicciones de la TGR, esto constituiría un descubrimiento de excepcional importancia. La probabilidad de un resultado semejante la mayoría de los físicos (incluyéndome a mí), la consideramos notablemente pequeña..."

* El perihelio de Mercurio es el punto de la trayectoria elíptica de este planeta más cercano al sol.

La TGR en unión de la técnica radiolocacional transforma poco a poco la mecánica celeste del Sistema Solar en una nueva ciencia con otro nivel de exactitud con nuevos efectos y nuevas perspectivas. La única explicación consecuente para los pulsares, descubiertos en 1968, lo constituyen las estrellas neutrónicas, predichas en 1934; estos son entes de una densidad central tan elevada ($\sim 10^{14}$ g/cm^3) que las predicciones de la teoría de Einstein con respecto a su masa son entre un 10 y un 100 % más precisas que las predicciones de Newton.

La teoría de Einstein permite además explicar las propiedades de los cuerpos con respecto al subsiguiente aumento de la densidad que concluye con el proceso del colapso gravitacional (huecos negros). Mediante la geometrodinámica clásica de Einstein en 1939 fueron predichas las propiedades de estrellas que se encuentran en este estado. En él, el campo gravitacional se hace tan fuerte que absorbe cualquier luz emitida por la estrella.

En ningún lugar tan exacto como en la TGR ha actuado la gran idea de Einstein: la geometría del espacio constituye una nueva realidad física, la cual posee su dinámica propia.

La expansión del universo constituye la prueba más notable para la geometrodinámica de Einstein y la cosmología, la esfera más amplia de su aplicación.

Las divergencias aún existentes en los valores de la densidad media de la energía-masa de la sustancia en el universo (la TGR da 30 veces diferente a los datos astrofísicos de 1958) estimulan a los astrofísicos a continuar la búsqueda. Cada año ella lleva a nuevos indicios en favor de la existencia de materia en el espacio entre galaxias.

La TGR predijo también la existencia de la emisión cósmica inicial (radiación relicta) originada a partir de la explosión inicial (conocida como "Big Bang") e incluso el valor aproximado de su temperatura. La importancia de este tipo de emisión para el conocimiento acerca del universo radica en lo siguiente. Según esta teoría (Big Bang) durante la expansión cosmológica del universo, la temperatura del plasma caliente y de la radiación electromagnética que se encontraba en equilibrio termodinámico con este, disminuyó. Al alcanzar temperaturas del orden 4000° K ocurrió la recombinación de los protones y electrones formándose los átomos de hidrógeno y helio. Los cuantos de radiación ya no poseían la energía necesaria para la ionización de las sustancias y los mismos pasaban a través de ésta de forma similar a un medio transparente. La temperatura de esta radiación continuó disminuyendo hasta llegar a 3° K en nuestra época. De esta forma, esta radiación ya detectada se conserva hasta nuestros tiempos como el relicto de la época de recombinación y de formación de los átomos neutrales de H y He, trasmitiendo así importante información acerca de los procesos que ocurrieron en los primeros momentos de la formación del universo.

Otro problema de gran actualidad en la confirmación experimental de la TGR es la detección de las ondas gravitacionales. Las predicciones de Einstein realizadas en 1915 acerca de que la masa acelerada debe perder energía en forma de ondas gravitacionales encontraron evidencias experimenentales en las detecciones recientes de la disminución lentas de las dimensiones de la órbita del pulsar doble PSR 1913 + 16 |9|, aunque no existen hasta el momento suficientes evidencias que permitan confirmar su existencia. Numerosos esfuerzos se realizan en la actualidad para la detección de las ondas gravitacionales en condiciones de laboratorio |10|.

COSMOLOGÍA RELATIVISTA

El surgimiento de la cosmología moderna está ligado a la creación de la teoría relativista de la gravitación concebida por Einstein. En la primera etapa de su aparición la cosmología relativista le prestó la mayor atención a la geometría del universo (curvatura del espacio tiempo cuadridimensional y posible modelo cerrado del universo). Un gran giro ocurrió en la cosmología después de la publicación de los trabajos de Friedman. El demostró que la ecuación de gravitación de Einstein tiene soluciones no estacionarias, es decir, que la misma refleja el universo con curvatura variable de espacio tiempo y correspondientemente con volumen variable de espacio y con valor finito del tiempo. Una de las consecuencias de esta teoría es que en la ecuación de gravitación no es necesaria la existencia del término cosmológico como propuso Einstein.

En la teoría de Friedman se supone que la densidad de la materia en el universo es igual en cualquier punto (homogeneidad) y que el universo es isotrópico.

Los modelos no estacionarios, homogéneos e isotrópicos del universo constituyen los fundamentos de la cosmología moderna.

Aunque las soluciones de Friedman resultan ser una buena aproximación a la estructura del universo, en la actualidad, las mismas presentan un punto de singularidad, una época inicial en la cual toda la materia estaba concentrada en un punto único. El modelo de Friedman es una buena aproximación a partir de los primeros cien segundos después del "Big bang". Según la TGR clásica, el universo debe contener singularidad correspondiente al comienzo del tiempo.

Existen también singularidades en el colapso gravitacional de las estrellas donde se puede esperar la aparición de efectos gravitacionales cuánticos, los cuales hasta el momento son desconocidos.

No hay dudas que la aparición de singularidades en cualquier teoría es un indicio de límite de la teoría y de la necesidad de enriquecerla, precisamente en las regiones y en las condiciones cercanas a la singularidad. Con relación a esto hay tres posibilidades: 1. existencia de cierta longitud fundamental que limita al radio de la curvatura del espacio por las escalas ℓ_f y densidades $\rho_f \sim \hbar/c\ell_f$, 2. generalización de la TGR en el nivel clásico y 3. La aplicabilidad de la TGR está limitada por los efectos cuánticos. Los esfuerzos fundamentales actualmente se dirigen a la cuantificación de la TGR y a la creación de la cosmología cuántica. En este sentido ya existen algunos resultados |11|.

El concepto de longitud fundamental surge del hecho que desde el punto de vista cuántico, para distancias tan pequeñas es inevitable la existencia de fluctuaciones del campo gravitacional. La teoría clásica puede utilizarse sólo en el caso que estas fluctuaciones sean pequeñas. En este caso, las fluctuaciones cuánticas de la propia métrica δg_{ik} deben ser pequeñas en comparación con los valores clásicos de g_{ik}. De esta condición se deduce que los límites de aplicabilidad de la TGR se determinan por los siguientes parámetros |12|:

$$\ell_f = \sqrt{hG / c^3} = 1,66.10^{-33} \text{ cm} ; \; t_f = \ell_f/c = 5,4.10^{-44} \text{ seg} ;$$

$$\rho_f = h/cl^4 = 5,2.10^{93} \text{ g/cm}^3 ,$$

donde G es la constante gravitacional de Newton.

Es decir, para valores $\ell >> \ell_f$, $\rho << \rho_f$, $t << t_f$, los efectos cuánticos no influyen en la validez de la TGR y cuando $\ell \leq \ell_f$, $t \leq t_f$ y $\rho \geq \rho_f$ los efectos cuánticos son notables y la TGR no es aplicable.

Con respecto a la segunda probabilidad, está claro que antes de generalizar la TGR al nivel cuántico, es necesario verificar su validez en la región clásica con la mayor precisión posible, especialmente en presencia de campos gravitacionales fuertes. Por ello, un problema de actualidad lo constituye la validez de la TGR en estos campos. Como es conocido en el campo gravitacional débil las componentes del tensor métrico pueden considerarse cercanas a los valores galileanos, es decir,

$$g_{00} = 1 + 2\phi/c^2 \; ; \; g_{rr} = -1 + 2\phi/c^2 ,$$

donde ϕ es el potencial de Newton. En este sentido la condición de campo débil se expresa:

$$|\phi| / c^2 << 1 .$$

En los límites del Sistema Solar el campo gravitacional es muy débil. La TGR en los límites del campo gravitacional débil puede considerarse ya comprobada experimentalmente, sin embargo la situación es diferente para el caso de los campos fuertes. En los límites del Sistema Solar los miembros del orden $(\phi/c^2)^2$ son en 5-6 órdenes menores que los miembros $|\phi|/c^2$, sin embargo, en la superficie de las estrellas neutrónicas y en los pulsares.

$$|\phi_n| / c^2 \cong 0,1 - 0,3 .$$

Es conveniente señalar, que el problema de la comprobación de la TGR en el campo fuerte está estrechamente relacionada con el problema de los huecos negros. Su detección significaría un fuerte argumento a favor de su confirmación.

Hemos visto pues, los numerosos experimentos en los cuales la TGR ha encontrado su confirmación, no existiendo hasta el momento ni un solo ejemplo que contradiga algún aspecto de la teoría. No obstante, aún quedan cuestiones como son la detección experimental de las ondas gravitacionales, la confirmación de la existencia de los huecos negros y el cumplimiento de la TGR en los campos gravitacionales fuertes, los cuales constituyen el centro de la atención de numerosos científicos.

Es conocido que existen actualmente varias teorías que tratan de competir con la dinámica einsteniana |13, 14|. Algunos autores, negando el papel de la geometría de Riemann en la TGR han tratado de desarrollar teorías de la gravitación sobre la base del espacio-tiempo plano. Estas teorías se conocen con el nombre de teorías lineales de la gravitación. En |15, 16| se desarrolla una de las teorías lineales más recientes, la cual presenta al universo como plano e infinito y niega la existencia de los huecos negros. Sin embargo, estas teorías no han tenido ni la aceptación universal ni la comprobación experimental de la TGR, por ello es generalmente reconocido que en el macromundo, la gravitación einsteniana no necesita ninguna revisión por razones observacionales y experimentales. Al contrario, todo parece indicar que fuera de la región de aplicabilidad de la gravitación newtoniana, el fenómeno de la gravitación está descrito de acuerdo con el experimento, en la forma más bella, concisa y lógica por medio de la original dinámica einsteniana.

Particularmente en las últimas dos décadas el progreso en técnicas matemáticas abstractas y las perspectivas abiertas por la posibilidad de la aplicación de la computación aumentaron enormemente la fuerza predictiva de la dinámica relativista de Einstein. La motivación básica de las muchas relatividades no einstenianas, la búsqueda de una teoría "más fácil" matemáticamente, pierde terreno de año en año.

CONCLUSIONES

En la segunda parte de este trabajo hemos realizado un análisis de los aspectos físicos que fundamentan la TGR, haciendo un breve recuento de los pasos que dio Einstein hasta llegar a la formulación definitiva de la teoría, considerando el formalismo matemático tensorial que utilizara este para obtener las ecuaciones de movimiento del campo gravitacional en forma de covariancia general y obteniendo las principales ecuaciones de la teoría. Se analizan las consecuencias de la introducción del campo gravitacional en la geometría y en las propiedades del espacio-tiempo de la TGR.

Se hace una revisión del estado actual de la comprobación experimental de la teoría y sus aplicaciones más recientes en las cuales la misma encontró su confirmación. En este sentido se destaca cómo se incrementa cada vez más la exactitud de los experimentos relacionados con la detección experimental de la desviación de un rayo de luz en la cercanía de cuerpos de gran masa, el desplazamiento del perihelio de Mercurio y el corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales. Se presenta cómo la existencia de la emisión cósmica inicial (radiación relicta) y el descubrimiento de los pulsares y su interpretación como estrellas neutrónicas de alta densidad, constituyen confirmaciones de la teoría y cómo los huecos negros constituyen otra de las predicciones teóricas de la TGR cuya detección representaría una prueba más de su solidez. Se analiza cómo la existencia de las singularidades constituye una posible frontera de aplicabilidad de la TGR, induciendo la necesidad de la conformación de la teoría cuántica de la gravitación.

El análisis realizado sobre la teoría de la relatividad, incluyendo su verificación experimental y grado de incidencia en el desarrollo de la física contemporánea, permite afirmar que la teoría de la Relatividad en lo que respecta tanto a la TER como a la TGR constituye una de las teorías más perfectas, armónicas y congruentes construidas por el genio humano.

En la actualidad la relatividad especial forma parte integral de la física moderna, incluidos varios campos de aplicaciones prácticas y tecnológicas. Por otra parte, la relatividad moderna tiene fuertes vínculos con los logros más interesantes de la astrofísica y con éxitos de la cosmología.

Sin embargo, es importante señalar al arribar a los 70 años de esta teoría, que el trabajo de Einstein no se limitó solamente a la TR, recordemos otras facetas de su obra científica.

Aunque la TR fue la obra cumbre de Einstein que inmortalizara su nombre, esta no constituye el único aporte que el genial físico hiciera a la ciencia. El célebre científico, Max Born afirmó: "...creo que Einstein habría sido uno de los más grandes físicos teóricos de todos los tiempos aunque no hubiera escrito un solo renglón sobre la relatividad".

Un aporte significativo realizó Einstein en la física molecular con la publicación en 1905 de su tesis de doctorado basada en la teoría del movimiento browniano. Hasta ese momento la naturaleza de dicho movimiento era un enigma y Einstein elaboró su teoría relacionando la teoría macroscópica termodinámica con su base microscópica, atómica, estadístico cinética.

Se ha hablado de su incomprensión de la mecánica cuántica y su actitud negativa hacia la misma. Sin embargo, es necesario recordar los grandes aportes de Einstein en la creación y el desarrollo de la teoría cuántica. En 1905 Einstein publicó la audaz hipótesis acerca de la estructura cuántica de la luz prediciendo la existencia de los "fotones" y sentando así el fundamento de la teoría cuántica de la luz.

No se puede tampoco olvidar los trabajos en termodinámica y estadística. Einstein creó los fundamentos de la teoría cuántica de las capacidades caloríficas de las sustancias y aplicó el método estadístico al gas ideal uniatómico lo cual conllevó a la creación de la estadística de Bose-Einstein.

La idea de los cuantos de luz le permitió a Einstein dar razón teórica al paradójico comportamiento experimental del llamado efecto fotoeléctrico por el que recibiera el premio Nobel en 1921.

En 1913, el físico Niels Bohr propuso un modelo clásico-cuántico del átomo que fue recibido con desconfianza por la mayoría de los científicos de la época. Einstein notando su importancia, comenzó rápidamente a trabajar sobre la nueva idea de los niveles de energía, introducida por Bohr. Aplicando argumentos probabilísticos, llegó de nuevo, en forma muy sencilla, a a la fórmula de Planck para el cuerpo negro |17|, de paso introdujo y desarrolló la idea de la radiación estimulada de los átomos que, varias décadas más tarde, habría de conducir a la invención del máser y el láser.

Los más destacados físicos creadores de esta teoría, entre los que se encuentran Heisenberg, Bohr, Pauli, Dirac y otros reconocieron cuánto aportaron las discusiones con Einstein al desarrollo e interpretación de la mecánica cuántica.

Son famosas, por otra parte, las discusiones con Bohr acerca de la descripción mecánico-cuántica de los fenómenos del micromundo y su carácter incompleto según Einstein. Aunque el criticismo de Einstein, en este sentido no ha sido del todo aceptado por la mayoría de los físicos, sus ideas permanecen aún vigentes. Esto se manifiesta en la conferencia celebrada en 1983 en la Universidad de Bari, sobre los fundamentos de la mecánica cuántica, en la cual numerosos trabajos fueron dedicados a examinar la validez de la crítica de Einstein en este aspecto. La raíz de las discusiones están en el artículo publicado por Einstein, Podolsky y Rosen en 1935 titulado "¿puede la descripción mecánico-cuántica de la realidad física ser considerada completa?" |18|. En este artículo se considera un sistema físico descriptible por la teoría cuántica, compuesto de dos partículas alejadas entre sí de tal forma que la medición de la posición de una partícula permite conocer la posición de la otra y de la misma forma para la medición de la velocidad. Einstein plantea que la medición en una partícula no puede ser influenciada por la medición en la otra partícula debido a que están suficientemente separadas una de otra. Por consiguiente, una de las partículas poseerá simultáneamente su posición y su velocidad como propiedades "reales". Sin embargo, según la teoría cuántica el principio de incertidumbre de Heisenberg prohibe esto. Por lo tanto, concluye Einstein, la teoría cuántica es incompleta, debe existir una teoría más profunda que permita la coexistencia simultánea de la posición y velocidad de la partícula en tal situación. La respuesta de Bohr a la crítica de Einstein acerca de que la posición y la velocidad no pueden ser simultáneamente concebidas como propiedades reales de una partícula debido, a que las mismas son más bien propiedades de mediciones experimentales incompatibles, no convencieron a Einstein.

A pesar de que muchos consideran que la paradoja de Einstein son sólo interpretaciones incorrectas de la mecánica cuántica, existen opiniones coincidentes con el punto de vista einsteniano, acerca de que aunque esto lleve tiempo, la teoría cuántica será sustituida por una teoría más completa |19|.

Muchos consideran que la actividad científica que desplegó Einstein en los últimos años de su vida no fue muy productiva y que sus esfuerzos por lograr una teoría de unificación de las fuerzas electromagnéticas y gravitacionales fueron estériles. Sin embargo, podemos decir que aunque por la magnitud de la tarea y el moderado desarrollo de métodos teóricos y posibilidades experimentales requeridas los resultados de su trabajo en esta esfera no alcanzaron el éxito, su orientación general conserva de todos modos su valor.

Einstein deseaba ver una unificación de la gravedad y el electromagnetismo como aspecto de una sola fuerza. En otras palabras, deseaba unir la carga eléctrica con la carga gravitacional (la masa) en un ente único. Habiendo demostrado que la masa (carga gravitacional) estaba conectada con la curvatura del espacio tiempo, Einstein confiaba que la carga eléctrica estuviera también conectada de alguna forma con otras propiedades geométricas de la estructura espacio tiempo y que esta nueva fuerza unificada fuera una manifestación de la estructura del espacio-tiempo.

La idea de la teoría unificada de las fuerzas y los campos renació impetuosamente en nuestra época, durante el último decenio, sobre una base nueva, que incluye orgánicamente las propiedades cuánticas de la materia. La denominada teoría de los campos de calibración permitió ya crear la teoría que unifica las interacciones electromagnéticas y las débiles (teoría de Weinberg y Salam), llamadas electrodébiles que condujeron al descubrimiento de las partículas W^+ , W^- y Z° denominadas bosones intermedios. Aparecen también diferentes variantes de teorías que unen estas interacciones con interacciones fuertes (nucleares).

Por último, la unión de todas estas interacciones con la gravitación en la denominada supergravitación originó una explosión de nuevas esperanzas.

La expectación teórica futura es que la fuerza nuclear fuerte sea también una fuerza única en la cual las cargas nucleares fuertes correspondientes estén eventualmente unidas con las cargas electrodébiles formando una entidad única perteneciente a un llamado "grupo de simetría interna". La segunda etapa de unificación uniría entonces esta fuerza combinada y la gravitacional, y así se realizaría el sueño de Einstein de incluir la fuerza final unificada dentro de la geometría espacio-tiempo.

A partir del éxito alcanzado con la fuerza electrodébil, se espera pronto progreso en el concepto de una fuerza ELECTRO-NUCLEAR unificada que comprenda el electromagnetismo y los dos tipos de fuerza nuclear.

Uno de los intentos actuales es describir la física en un espacio tiempo de 11 dimensiones. De estas 11 dimensiones, 4 son las dimensiones espacio-temporales conocidas, cuya curvatura está relacionada con la gravitación y las otras 7 dimensiones corresponden a un espacio de simetría interna |20|.

Hoy, en el clima optimista de la física el sueño de Einstein sobre la unificación final de la fuerza electro-nuclear con la gravedad y sobre el hecho de que esta nueva fuerza unificada sea una manifestación de la estructura del espacio-tiempo parece estar más cerca a su realización.

Hemos podido observar que además de la teoría de la relatividad y de las otras contribuciones que Einstein hiciera a la física, el papel que el mismo jugó en la teoría cuántica y en la teoría unificada del campo no fue estéril ni confuso, sino que sus ideas contribuyeron al posterior desarrollo de ambas.

Se puede decir en resumen que el colosal trabajo de Einstein en el campo de la física teórica es de un valor incalculable y la cima de este esfuerzo lo constituye la Teoría de la Relatividad, por ello, quisiéramos finalizar con las palabras de alguien que hizo realidad parte de los anhelos del genial físico sobre la unificación de las fuerzas fundamentales de la naturaleza, nos referimos, al Dr. Abdus Salam, premio Nobel, creador de la teoría de las interacciones electrodébiles, quien al referirse a Einstein señaló |21|:

"No ha existido alguien en este siglo como Einstein, quizás en toda la historia de la humanidad nadie haya pensado nunca tan lejos en lo concerniente a las Ciencias Físicas. Ciertamente, no ha existido nadie con tal responsabilidad individual por cosas tan revolucionarias en la física".

Los autores desean expresar su agradecimiento a H. Pérez y A. Cabo del IMACC y a C. Rodríguez de la Universidad de La Habana por comentarios de interés realizados al presente trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Einstein, A.
   Obras Completas. Tomo I, 1965, Nauka.

2. ——————
   Fundamentos de la teoría general de la relatividad. Obras Completas Tomo I. pág. 452, 1965.

3. Lenin, V.I.
Materialismo y Empiriocriticismo. Obras Completas, Tomo 18, Progreso, 1983.

4. Einstein, A.
La esencia de la teoría de la relatividad, Obras Completas, TomoII, pág. 5.

5. Landau, Lifshitz
Teoría Clásica de los campos. V.2, Ed. Reverté, 1981.

6. Eötvos, R.
Math und natu wiss. Ber aus Ungarn, Bb VIII, 1890; Wiedeman Beibl. 15 (1891) 688.

7. Braginsky, V.B. and V.I.Panov
Zh ETF 61 (1971) 873.

8. Ginzburg, V.I.
Sobre la Física y la Astrofísica, Nauka, 1985.

9. Weisberg, J.M., J.H.Taylor and L.A.Fowler
Scientific American, Oct.1981, V.245, p.66.

10. Compendio de trabajos de la Conferencia sobre Creación de emisores y detectores de ondas gravitacionales, Dubna 25-27 de junio, 1985.

11. Gurovich, V.Ts. and A.A.Strarobinskij
Zh ETF 77 (1979) 1683.

12. Ginzburg, V.L.
Uspekhi Fiz. Nauk 128 (1979) 435.

13. Gupta, S.
Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 334.

14. Tirring, W.
F der Physik 7 (1959) 79.

15. Logunov, A.A. and A.A.Vlasov
Teoret i matemat fizika 61 (1984) 13.

16. Logunov, A.A. and M.A.Mestvirishvili
EChAya 17 (1986) 5.

17. Einstein, A.
Obras Completas, Tomo 3, Nauka, 1967.

18. ————
Obras Completas, T.3, Nauka, 1967, p.604.

19. Open questions in quantum Physics, 1985, Edited by G. Tarozzi and A.Vander Merwe.

20. Abdus Salam,
Einstein's last dream: The space time unification of fundamental forces. En el libro: Ideals and Realities. 1985, p. 299.

21. Abdus Salam
The nature of the "Ultimate" explanation in Physics. En el libro: Ideals and Realities, 1985, p. 310.