

El solapamiento molecular y la mezcla de gases

R. Alonso Martos, M.A.H. García Díaz, Departamento de Física, I.S.P.E.T.P.

RESUMEN

Algunos textos de Física General y Molecular han estado empleando, desde hace tres décadas, la frase "solapamiento de las moléculas", con la intención de dejar constancia de su omisión durante el proceso deductivo que conduce a derivar, entre otras, la ecuación del recorrido libre medio de la molécula. Esto obedece a que dicha omisión abrevia los correspondientes desarrollos, y posibilita un tratamiento estadístico elemental de acuerdo con una de las tendencias actuales de la Metodología de la Enseñanza de la Física. Obviamente, un enfoque más consistente debe considerar el solapamiento molecular. Por ello, en este trabajo, se le analiza en el caso de una mezcla gaseosa, obteniendo una formulación más general y coherente de uno de los primeros tópicos de la Teoría Cinética de los Gases.

ABSTRACT

Some textbooks on General and Molecular Physics have been using, from three decades ago, the phrase "molecules overlapping", but only to omit its consequences during the deductive process which conduces to derive, among others, the molecule mean free path equation. This abbreviates the deduc-

tive process and allows an elemental statistical treatment according to the present-day tendencies of the Physics Education Methodology. Obviously, a more accurate approach must regard the molecules overlapping. For this reason, in the present paper, we analyze it in the case of a gaseous mixture, obtaining a more general and coherent formulation about one the first topics in the Kinetic Theory of Gases.

I N T R O D U C C I Ó N

El estudio del recorrido libre medio de la molécula (r.l.m.), en el caso de los gases heterogéneos, resulta física y matemáticamente tan complicado que sólo lo contemplan unos pocos libros especializados en Teoría Cinética de los Gases /1/. No obstante, en muchos libros de Física General, algunos de los cuales se utilizan como textos /2/ y literatura de consulta /3/ de la enseñanza superior cubana, indirectamente se opera con este asunto, cuando se hace referencia al r.l.m. en el aire señalando el valor de esta magnitud a distintas presiones y, por ende, a diferentes alturas en la atmósfera terrestre /4/.

Aunque tales cálculos suelen hacerse empleando la ecuación del r.l.m., estos sólo brindan un estimado de su orden, y el logro de una mejor aproximación conducirá a enfrentar al estudiante con una teoría más precisa, lo que, por lo general, no resulta aconsejable a este nivel.

Ahora bien, al estudiar, haciendo uso del solapamiento molecular, el r.l.m. en el gas homogéneo /5/ se obtuvo un tratamiento estadístico tan sencillo y consistente que es recomendable abordar el análisis del r.l.m. en la mezcla de gases utilizando el mismo procedimiento. Ello permitirá simplificar el proceso deductivo, en tal medida, con respecto a la derivación tradicional /1/ que, sin riesgo a su inasequibilidad, en los niveles II y III del curso de Física General el docente podría orientarlo dentro de los contenidos dedicados al trabajo independiente de sus alumnos o como tema de otro tipo de actividades, por ejemplo, en concursos. Además como se constatará, el grado de generalización alcanzado es tal que los resultados logrados en /5/ constituyen un caso particular de los de este trabajo y, en este sentido, es oportuno recordar el papel que Stolietov /6/ le atribuye a la generalización científica en el proceso docente-educativo, al considerar que "ella contiene toda la potencialidad de la pedagogía". Más aún, al elaborar una formulación teórica rigurosa, con una estructura lógica coherente, se está propiciando el empleo de los métodos lógicos /7/, cuya función en el desarrollo de las capacidades cognoscitivas de los estudiantes es notoria.

Por otra parte, el procedimiento que se fundamenta en el sobrecubrimiento de unas moléculas por otras, posibilita la obtención, de manera inmediata, de la célebre ecuación de Clausius de los recorridos libres /8/ que rige la dispersión de los haces moleculares, tópico de tanta actualidad dentro de

la Física Moderna /9/ si bien su mayor significación consiste en que relaciona al estudiante, por primera vez en el nivel superior de estudios, con la Ley Exponencial /10/ que con tanta frecuencia aparece en la descripción matemática de otros fenómenos de la Física y la cual, posteriormente, el alumno recibirá. De este modo dos contenidos básicos de la Teoría Cinética de los gases se presentan interrelacionados a través de un único procedimiento, lo que facilita su sistematicidad dentro de la unidad temática.

En cuanto a la importancia del concepto de r.l.m. sépase que estipular solamente el parámetro presión, en una descripción dada, es menos informativo del grado de vacío existente que lo es dar el valor del r.l.m. /4/, y cómo este concepto desempeña un significativo papel en el estudio de los fenómenos de transporte, de modo que la prioridad que el mismo reclama, como parte de los contenidos del programa de Física General, está harto justificada. Por último, los autores de este trabajo analizan el aspecto cuantitativo del solapamiento molecular, así como su correspondiente interpretación estadística.

DESARROLLO

Considérese una mezcla uniforme de K gases contenida en un recipiente, como el que se ilustra en la figura 1. Para una partícula "m", moviéndose a través del gas, sea σ_i la sección eficaz de choque de una de las N_i moléculas de cada gas componente, que en este trabajo se supone constante, y cuya densidad molecular la denotaremos por n_i ; siendo el subíndice un número natural tal que $1 \leq i \leq K$. La densidad molecular de la mezcla es

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

y asumamos que es pequeña, de modo que la misma se comporte como un gas ideal, así como que todas las moléculas estén en reposo, a fin de determinar la probabilidad de choque en el intervalo $(x, x + dx)$ de la partícula "m" al penetrar en la mezcla gaseosa.

Para ello subdivídase el volumen $S \cdot x$ en J capas de espesor Δx (figura 2) suficientemente pequeño, para que, en cada una de las mismas, la proyección de las secciones eficaces de las moléculas sobre el plano yz no se sobrecubran entre sí. En la primera capa, la partícula "m" puede chocar con cualquiera de sus ΔN moléculas, donde

$$\Delta N = S n \Delta x \quad (1)$$

Como estas moléculas recubren un área

$$s \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i$$

a partir de la segunda capa, resulta que "m" puede chocar con cualquiera de las

$$\Delta N_1 = S_1 n \Delta x \quad (2)$$

moléculas no solapadas del intervalo $(\Delta x, 2\Delta x)$ siendo

$$S_1 = S \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]$$

de modo que, con el auxilio de (1) la ec. (2) se convierte en

$$\Delta N_1 = \Delta N \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]$$

De manera similar las ΔN_1 moléculas no solapadas de la segunda capa recubren un área

$$S_1 \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i$$

a partir de la tercera capa, por lo que "m" puede chocar con cualquiera de las

$$\Delta N_2 = S_2 n \Delta x \quad (3)$$

moléculas no solapadas del intervalo $(2\Delta x, 3\Delta x)$, siendo

$$S_2 = S \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^2$$

de modo que con el auxilio de (1) obtenemos para (3)

$$\Delta N_2 = \Delta N \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^2$$

y continuando, reiteradamente, este proceso, se obtiene para el área no solapada, \bar{S}_x , de la capa J situada entre x y $x+\Delta x$ la expresión

$$\bar{S}_x = S \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^{x/\Delta x}$$

ya que:

$$J = x/\Delta x$$

Luego, el número de moléculas no solapadas en dicha capa es:

$$\Delta N_x = \Delta N \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^{x/\Delta x}$$

El paso al límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ permite escribir

$$S_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{S}_x = S \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^{x/\Delta x}$$

y a su vez

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta N_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta N \cdot \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left[1 - \Delta x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right]^{x/\Delta x}$$

y realizando las operaciones pertinentes se arribará a las siguientes expresiones:

$$S_x = S \cdot \exp. \left[-x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right] \quad (4)$$

$$dN_x = dN \cdot \exp. \left[-x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right] \quad (5)$$

Esta última ecuación permite, mediante integración entre 0 y L, determinar el número de moléculas no solapadas, N_L , en el recipiente. Así

$$N_L = S \left[1 - \exp. \left[-L \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right] \right] / \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i / n \quad (6)$$

y el número máximo, N_{\max} , de moléculas no solapadas viene dado por

$$N_{\max} = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L = S / (1/n) \cdot \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \quad (7)$$

que sugiere definir la probabilidad de choque, $d\phi$, de la partícula "m" entre $(x, x+dx)$, como:

$$d\phi = dN_x / N_{\max} \quad (8)$$

De todo lo anterior, se deduce sustituyendo (5) y (7) en (8) que

$$d\phi = -d \left[\exp. \left[-x \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \right] \right] \quad (9)$$

y ya que el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ de un haz de partículas que atraviese la mezcla gaseosa viene dada por

$$\bar{\lambda} = \int_0^L x \, d\phi$$

con el auxilio de (9) se tiene

$$\bar{\lambda} = 1 / \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \quad (10)$$

o:

$$\bar{\lambda} = 1 / \bar{\sigma} n$$

donde:

$$\bar{\sigma} = 1/n \sum_{i=1}^k \sigma_i n_i \quad (11)$$

lo cual implica que la mezcla gaseosa, a los efectos de determinar el $\bar{\lambda}$ del haz de partículas, se comporta como un gas homogéneo formado por moléculas de sección eficaz $\bar{\sigma}$. Además, si para el haz de partículas que atraviesa al gas su intensidad en el punto x , se denota por I_x , y la probabilidad de choque de cada partícula del haz en el subintervalo $(x, x+dx)$ es

$$d\phi = - dI_x/I_0 \quad (12)$$

donde I_0 es la intensidad del haz en $x = 0$, y dI_x es la variación de intensidad experimentada por el haz a la distancia x como consecuencia de las colisiones con las moléculas de la mezcla gaseosa; las ecuaciones (12) y (9) permiten escribir

$$I_x = I_0 \exp.(-\bar{\sigma} n x) \quad (13)$$

que es la ecuación de Clausius de los recorridos libres.

Por otra parte de (4) se infiere que el área solapada S'_x a la distancia x es:

$$S'_x = S [1 - \exp.(-\bar{\sigma} n x)] \quad (14)$$

de manera que si se define cuantitativamente el solapamiento molecular, ξ , mediante la relación

$$\xi = S'_x/S \quad (15)$$

la sustitución del numerador de (15), por el miembro derecho de (14), produce:

$$\xi = 1 - \exp.(-\bar{\sigma} n x) \quad (16)$$

DISCUSIÓN

El tratamiento estadístico del solapamiento molecular en la mezcla de gases ha conducido, en primer lugar, a derivar, la conocida función de distribución de los recorridos libres y, después, a una definición matemática del propio concepto de solapamiento molecular. Adviértase, cómo el procedimiento seguido para la obtención de la ecuación (9), que en el caso del gas homogéneo se reduce a su función de distribución de los recorridos libres, está mucho más vinculada al aspecto físico del problema que el utilizado por otros autores /3, 4/; siendo además completo, pues no requiere derivaciones adicionales para llegar al resultado final. El conocimiento de (9) permite deducir conjuntamente las ecuaciones (10) y (13), es decir, las ecuaciones del r.l.m. y de Clausius respectivamente; las cuales tradicionalmente se deducen por caminos diferentes, y mediante la expresión

(11) puede interpretarse el comportamiento de la mezcla gaseosa como el de un gas uniforme, constituido por moléculas de sección eficaz de choque $\bar{\sigma}$.

Finalmente, la caracterización del solapamiento molecular como magnitud física mediante la relación (15), permite, a su vez, su interpretación estadística. En efecto, integrando la ecuación (9) y observando (16) se tiene:

$$\varphi = \xi$$

de modo que ξ equivale a la probabilidad de choque de la partícula "m" en el intervalo $(0, x)$. Por consiguiente, el solapamiento molecular da una medida de la probabilidad de choque de cualquier partícula que atraviese a la mezcla gaseosa y, en este sentido, la definición de ξ a través de (15) es innegablemente superior a la definición planteada en /5/; pues ésta no es susceptible de semejante interpretación, limitándose a una mera relación numérica.

CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos es posible extraer las siguientes conclusiones:

1. Se elabora una formulación que propicia relacionarse, de una manera rigurosa y sencilla, con las regularidades estadísticas, lo cual se considera como una de las tendencias actuales de la Metodología de la Enseñanza de la Física.
2. Se determina analíticamente la función de distribución de los recorridos libres, a partir de la cual se derivan la ecuación del recorrido libre medio de la molécula y la ecuación de Clausius de los recorridos libres en una mezcla de gases; hecho que constituye una generalización de los resultados alcanzados en el caso del gas ideal homogéneo.
3. Se demuestra que, a los efectos de determinar el recorrido libre medio y la ecuación de Clausius en la mezcla gaseosa, esta se comporta como un gas químicamente homogéneo.
4. Se presenta una definición analítica, mucho más rica, del solapamiento molecular; encontrándose las magnitudes físicas de las que depende y permitiendo, a su vez, la interpretación estadística correspondiente.

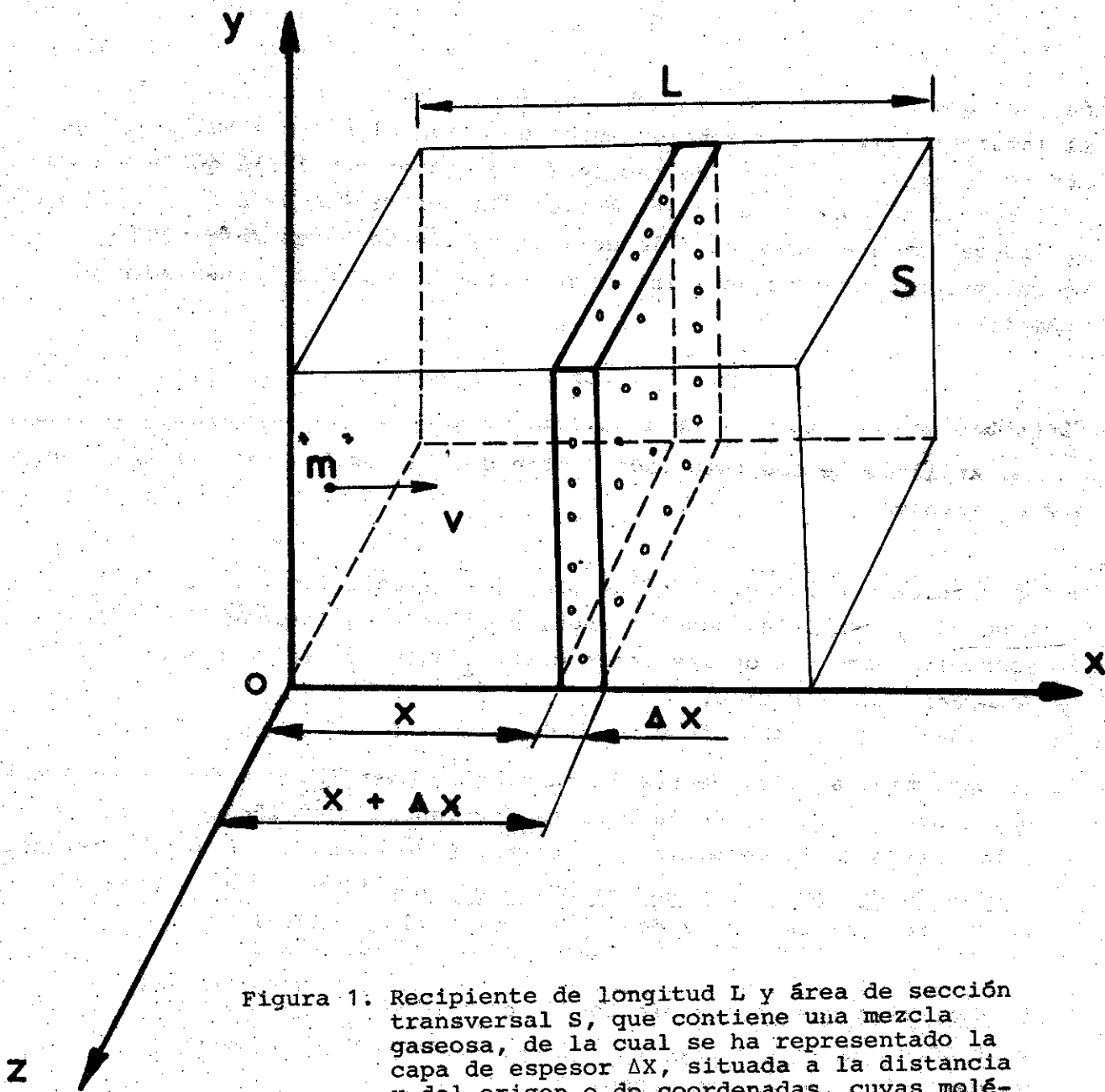


Figura 1. Recipiente de longitud L y área de sección transversal S , que contiene una mezcla gaseosa, de la cual se ha representado la capa de espesor ΔX , situada a la distancia x del origen O de coordenadas, cuyas moléculas se suponen en reposo, en tanto la partícula "m" posee una velocidad V .

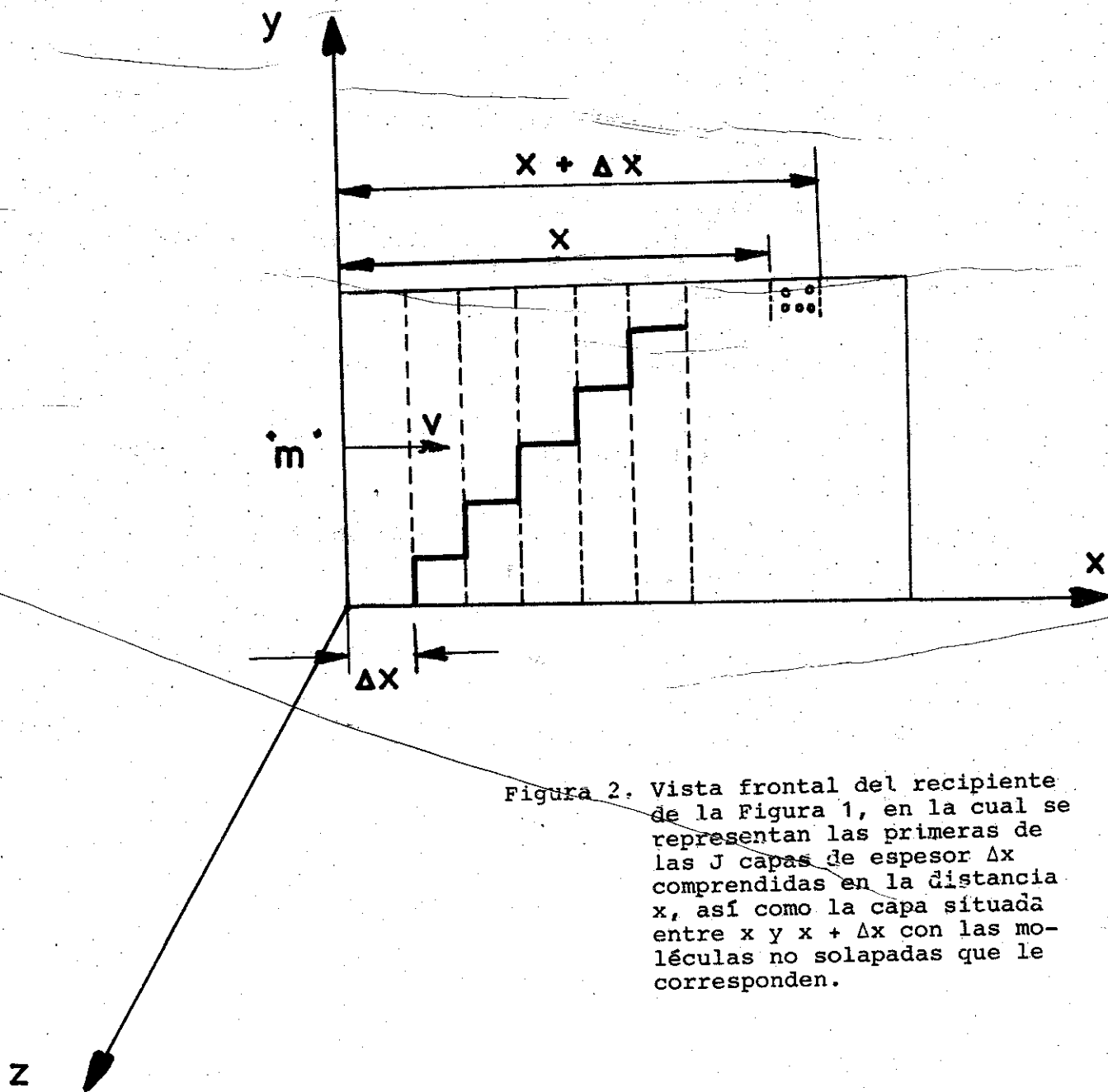


Figura 2. Vista frontal del recipiente de la Figura 1, en la cual se representan las primeras de las J capas de espesor Δx comprendidas en la distancia x , así como la capa situada entre x y $x + \Delta x$ con las moléculas no solapadas que le corresponden.

BIBLIOGRAFIA

1. Jeans, J.H.
An Introduction to the Kinetic Theory of Gases. London. Cambridge University Press, 1959. p. 43-120.
2. Ruíz de Zárate y otros
Física Molecular y Termodinámica. La Habana. Editorial Pueblo y Educación, 1974. p. 323-329.
3. Ingard, U. y W.L. Kraushaar
Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas. España. Reverté, 1966. p. 496-502.
4. Resnick, R. y D. Halliday
Física. t.1. La Habana. Edición Revolucionaria, 1966. p. 687-690.
5. García, M.A.H. y J.L. Gondar
Revista Cubana de Física. Vol. V, No. 1. p. 95-100 (1985).
6. Stoletov, V.N.
El maestro, la ciencia y los metodos de enseñanza. La Habana. Editorial de libros para la Educación, 1977.
7. Álvarez, C.M.
Revista Educación. Vol. 9, No. 32. p. 99-104 (1979).
8. Kikoin, A.K. e I.K. Kikoin
Física Molecular. Moscú. Editorial Mir, 1979.
9. Zorn, J.C.
Am. J. Phys. Vol. 32, No. 10. p. 721-732 (1964).
10. Curtis, J.
Am. J. Phys. Vol. 46, No. 9. p. 896-906 (1978).

Recibido: 3 de febrero de 1987.