

Sobre la radiación de una antena de ranura en una guía de ondas planas

José Marín Antuña. Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física. Universidad de La Habana

RESUMEN

En la teoría y la técnica de las antenas de ranura resulta de gran interés la solución del problema sobre la radiación de ondas electromagnéticas desde una ranura en una guía de ondas. En la actualidad, en general los métodos de solución de este tipo de problemas han sido asintóticos en la aproximación de una ranura infinitamente estrecha en comparación con las dimensiones de la guía. Sin embargo, la matemática numérica y la computación hoy en día permiten resolver numéricamente este tipo de problemas para ranuras de dimensiones finitas. A esto se dedica el presente trabajo.

ABSTRACT

The theory and technical applications of cleft antenna are very interesting for the solution of the problem of electromagnetic wave radiations from a cleft in a wave guide. At present the methods for the solution of this kind of problem have been solved asymptotically when the cleft is infinitely narrow in comparison with the dimension of the guide. Nevertheless, numerical mathematics and computational methods today permit to solve this kind

of problem for cleft of finite dimension. This is the object of the present work.

INTRODUCCIÓN

La utilización en la técnica de líneas de comunicación formadas por guías de ondas [1], de uniones complejas de ranuras en guías de ondas [2, 3] y de sistemas de ranuras irradiantes [4] conduce al estudio del problema de la unión electromagnética entre dos volúmenes a través de una ranura. En los trabajos [5-7] se da la solución de una ecuación integrodiferencial para el campo en una ranura entre dos volúmenes bajo la suposición de que la ranura es exponencialmente estrecha ($\ln \frac{\lambda}{\alpha} \gg 1$, $\ln \frac{l}{\alpha} \gg 1$). A la generalización para el caso de una ranura simplemente estrecha ($\frac{\lambda}{\alpha} \gg 1$, $\frac{l}{\alpha} \gg 1$) están dedicados los trabajos [8, 9] en los cuales en el desarrollo del núcleo de la ecuación integral para el campo en la ranura se mantienen no sólo los términos de orden $\ln \frac{\lambda}{\alpha}$, sino también los de orden de la unidad y en los que se da un método variacional iterativo para la obtención de los elementos de la matriz de dispersión.

Con excepción de pocos casos [10, 11] todos los trabajos han sido dedicados a métodos asintóticos de solución del problema de la unión electromagnética de dos volúmenes a través de una ranura. La obtención de los términos subsiguientes de la asintótica está ligada a grandes dificultades (el tamaño y la complejidad de las expresiones). Los límites de la aplicabilidad de las fórmulas asintóticas están evaluados sólo en el caso de la difracción en una ranura en una pantalla plana [12]. No existe ninguna comprobación del balance energético; de esto sólo se habla en el trabajo [13].

Gracias a los trabajos de A.N. Tifjonov [14, 15] y de Lávrientiev [16] sobre la solución de problemas incorrectamente planteados surgió la posibilidad de obtener con métodos numéricos la solución de ecuaciones integrales de primera especie en máquinas computadoras.

El presente artículo constituye la primera parte de un trabajo publicado por el autor [17] en 1969 en una revista de la Universidad Estatal de Moscú. Su intención es poner en conocimiento del lector cubano un método útil de solución de problemas de difracción de ondas en ranuras en guías de ondas mediante la solución numérica de una ecuación integral de Fredholm de primera especie con núcleo regularizante. No obstante, los años transcurridos desde su primera publicación en la URSS, la importancia y actualidad del tema en nuestro país, tanto desde el punto de vista físico-matemático, como desde el punto de vista de la aplicación práctica, amerita a nuestro juicio su publicación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Investiguemos el problema de la radiación desde una ranura en una guía de ondas plana. Supongamos que tenemos dos placas paralelas separadas

entre sí la distancia a . En una de dichas placas está practicada una ranura de ancho $2L$ (fig.1). Considerando el problema bidimensional, referiremos nuestro estudio al sistema de coordenadas (x, z) en el cual el eje Oz se encuentra sobre la placa inferior de la gufa y el eje Ox es perpendicular a este y se encuentra colocado de forma tal que la ranura mencionada está centrada en el mismo. Supongamos que por la gufa desde $z = -\infty$ viaja una onda electromagnética con componentes E_x , E_z y H_y no iguales a cero; las restantes componentes son idénticamente nulas. Representando la componente H_y del campo magnético mediante la función $u(x, z)$, la onda incidente la daremos en la forma

$$u_0 = A e^{i\gamma_m z} \cos \alpha_m x, \quad (1.1)$$

donde A , $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\gamma_m^2 = k^2 - \alpha_m^2$ y $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ son magnitudes conocidas y m es un número natural fijo. La dependencia temporal de nuestro campo la hemos supuesto igual a $\exp\{-i\omega t\}$, por lo que γ_m se define por la condición $\text{Im } \gamma_m > 0$.

El problema consiste en determinar el campo de radiación desde la ranura de la gufa, así como los coeficientes de reflexión y de paso de las ondas dentro de la gufa originados por la irregularidad provocada por la ranura. El problema matemático se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1.2)$$

con las condiciones

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0, x=a, |z|>L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a, |z|<L} = f(z) \neq 0 \quad (1.3)$$

y con las condiciones en el infinito:

$$u(x, z) = A e^{i\gamma_m z} \cos \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n z} \cos \alpha_n x \quad \forall z \leq -L, \quad (1.4)$$

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n z} \cos \alpha_n x \quad \forall z \geq L \quad (1.5)$$

para $0 < x < a$, y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right] = 0 \quad \forall x > a, \quad (1.6)$$

que tienen el sentido físico de la ausencia de ondas que viajen desde el

infinito hacia el origen de coordenadas, con excepción de la onda incidente. Nuestro problema consiste en determinar los coeficientes R_n , T_n y el campo irradiado para $x > a$. Las expresiones que se obtienen para los coeficientes R_n y T_n son:

$$R_n = i \frac{(-1)^n}{a\gamma_n} \int_{-L}^L e^{i\gamma_n z} f(z) dz, \quad (1.7)$$

$$T_n = A\delta_{nm} + i \frac{(-1)^n}{a\gamma_n} \int_{-L}^L e^{-i\gamma_n z} f(z) dz, \quad (1.8)$$

donde δ_{nm} es el símbolo de Kronecker.

El campo irradiado puede ser expresado en la forma

$$u(x_0^*, z_0^*) = - \int_{-L}^L G^M(M_0^*, M) \Big|_{x=a} f(z) dz, \quad (1.9)$$

lo que se desprende de la tercera fórmula de Green para la solución de la ecuación de Helmholtz en el caso bidimensional. Aquí

$$G^M(M_0^*, M) = \frac{i}{4} \left[H_0^{(1)} \left(kr_{M_0^* M} \right) + H_0^{(1)} \left(kr_{\bar{M}_0 M} \right) \right] \quad (1.10)$$

es la función de Green del problema; $H_0^{(1)}(x)$ es la función de Hankel de primer tipo. Como se aprecia, todas las magnitudes se expresan a través de la función $f(z)$ que tiene el sentido físico del campo E_z en la ranura de la gufa. Por consiguiente, el problema se reduce a determinar la función $f(z)$. Es conveniente destacar que la función $f(z)$ para $|z| \rightarrow L$ tiene una singularidad del orden $(z^2 - L^2)^{-\frac{1}{2}}$ lo que se desprende de las condiciones de Meysner para la difracción en el borde agudo de una pantalla [18].

2. ECUACIÓN PARA DETERMINAR LA FUNCIÓN $f(z)$

La tercera fórmula de Green para el caso bidimensional permite escribir la solución del problema de frontera interno en la forma

$$u(x_0, z_0) - A e^{i\gamma_m z_0} \cos \alpha_m x_0 = \int_{-L}^L G(M_0, M) \Big|_{x=a} f(z) dz \quad (2.1)$$

Aquí la función de Green es

$$G(M_0, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{a\gamma_n} e^{i\gamma_n |z-z_0|} \cos \alpha_n x \cos \alpha_n x_0 \quad (2.2)$$

Tomemos en (1.9) y en (2.1) el límite para $x_0 \rightarrow a$, $x \rightarrow a$, $z_0 \rightarrow z \in (-L, L)$ (la variable de integración en lo adelante será α). Obtenemos,

para (2.1):

$$u(a, z) - A e^{i\gamma_m z} (-1)^m = \int_{-L}^L G(a, a, z, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \quad (2.3)$$

para (1.9):

$$u(a, z) = - \int_{-L}^L G^M(a, a, z, \alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (2.4)$$

Multipliquemos por -1 la expresión (2.4) y sumémosla con (2.3). Así obtenemos una ecuación integral no homogénea de Fredholm de primera especie para determinar la función $f(z)$:

$$\int_{-L}^L K(z, \alpha) f(\alpha) d\alpha = \varphi(z), \quad (2.5)$$

donde

$$\varphi(z) = (-1)^{m+1} A e^{i\gamma_m z} \quad (2.6)$$

y el núcleo de la ecuación es

$$K(z, \alpha) = G^M + G = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|z-\alpha|) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\gamma_n |\alpha-z|}}{a\gamma_n} \quad (2.7)$$

3. REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Como ambas funciones de Green tienen en $z = \alpha$ una singularidad del tipo $\ln(1/(z-\alpha))$ y como de la expresión (2.7) se desprende que dichas singularidades se suman, el núcleo de nuestra ecuación integral tiene una singularidad de ese mismo tipo en la diagonal, para $z = \alpha$.

Dicha singularidad regularizadora del núcleo permite resolverla ecuación de la siguiente manera: veamos la ecuación (2.5) en los puntos discretos del segmento $(-L, L)$, $z_j = -L + \frac{\Delta z}{2} + (j-1)\Delta z$, ($j = 1, 2, \dots, N$):

$$\int_{-L}^L k(z_j, \alpha) f(\alpha) d\alpha = \varphi(z_j). \quad (3.1)$$

A continuación hagamos una partición del segmento de integración $(-L, L)$ respecto a α según se muestra en la figura 2, de manera que los puntos de ambas particiones estén relacionados por la fórmula $\alpha_j = z_j$.

La ecuación (3.1) puede ser entonces escrita en la forma:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\alpha_i - \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha_i + \frac{\Delta z}{2}} K(z_j, \alpha) f(\alpha) d\alpha = \varphi(z_j) \quad (3.2)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones algebraicas analicemos dos casos:

1) $i \neq j$ (al integrar desde $\alpha_i - \frac{\Delta z}{2}$ hasta $\alpha_i + \frac{\Delta z}{2}$ no cruzamos la diagonal)

En este caso, debido a la suficiente suavidad de la función integrando, sustituiremos la integral por la fórmula aproximada del rectángulo:

$$\int_{\alpha_i - \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha_i + \frac{\Delta z}{2}} K(z_j, \alpha) f(\alpha) d\alpha \approx K(z_j, \alpha_i) f(\alpha_i) \Delta z \quad (3.3)$$

2) $i = j$ (al integrar desde $\alpha_i - \frac{\Delta z}{2}$ hasta $\alpha_i + \frac{\Delta z}{2}$ cruzamos la diagonal). En este caso el núcleo tiene una singularidad. Por lo tanto haremos:

$$\int_{\alpha_j - \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha_j + \frac{\Delta z}{2}} K(z_j, \alpha) f(\alpha) d\alpha \approx f(\alpha_j) \int_{\alpha_j - \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha_j + \frac{\Delta z}{2}} K(z_j, \alpha) d\alpha \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta la fórmula (2.7) y el hecho de que el argumento en la integral (3.4) es pequeño, para la integral a la derecha de (3.4) obtenemos, finalmente, la expresión:

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_j - \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha_j + \frac{\Delta z}{2}} K(z_j, \alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a\gamma_n^2} \left(e^{i\gamma_n \frac{\Delta z}{2}} - 1 \right) - \frac{1}{k} \left[\frac{k\Delta z}{\pi} \left(\gamma - 1 + \ln \frac{k\Delta z}{4} \right) + \right. \\
& + \frac{k^3 \Delta z^3}{144 \pi} \left(4 - 3\gamma - 3 \ln \frac{k\Delta z}{4} \right) + \frac{k^5 \Delta z^5}{5120 \pi} \left(\gamma - \frac{17}{10} + \ln \frac{k\Delta z}{4} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{i}{k} \left[\frac{k\Delta z}{2} - \frac{k^3 \Delta z^3}{96} + \frac{k^5 \Delta z^5}{10240} \right] \equiv C, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

donde $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m\} = 0.57721566490 \dots$ es la conocida constante de Euler.

Por consiguiente, de la expresión (3.2) obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} f_i = \varphi_j, \tag{3.6}$$

donde

$$A_{ji} = \begin{cases} \Delta z K_{ji} & \forall i \neq j, \\ C & \forall i = j, j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aquí hemos introducido la notación

$$f_i = f(\alpha_i), \quad \varphi_j = \varphi(z_j), \quad K_{ji} = K(z_j, \alpha_i)$$

y C viene dada por la fórmula (3.5).

4. PATRÓN DE EMISIÓN DEL CAMPO IRRADIADO

En forma general el campo irradiado se expresa por la fórmula (1.9), pero para una investigación cualitativa de dicho campo es suficiente obtener su patrón de emisión. Tomando $M = (a, z)$ y el límite para $r_{M_0 M} \rightarrow \infty$ en la expresión (1.9) después de cálculos sencillos se obtiene para el patrón de emisión del campo irradiado de expresión

$$D(\varphi) = - \int_{-L}^L e^{ikz \operatorname{sen} \varphi} f(z) dz, \quad (4.1)$$

donde φ es el ángulo entre el radiovector ρ y el eje Ox (fig. 3).

5. ANÁLISIS NUMÉRICO

Un estudio de la serie que figura en la expresión (3.5) y la valoración de su resto, nos permite escribirla en la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{\gamma_n} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a\gamma_n^2} \left(e^{i\gamma_n \frac{\Delta z}{2}} - 1 \right) = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N_2-1} \frac{e^{iR\sqrt{\kappa^2 - n^2}}}{\kappa^2 - n^2} + \frac{a}{3} + \\ & + \frac{k^2 a^3}{45} + \frac{2k^4 a^5}{\pi^6} \sum_{n=1}^{N_1-1} \frac{1}{n^4 (n^2 - \kappa^2)}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde para un grado de exactitud dado ϵ , N_1 y N_2 se expresan como

$$N_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt[3]{945} \sqrt{\epsilon}}, \quad N_2 \geq 1 + \frac{1}{R} \ln \left[\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1}{1 - e^{-R}} \right] \quad (5.2)$$

y donde hemos introducido las notaciones

$$R = \frac{\pi \Delta z}{2a}, \quad \kappa = \frac{ka}{\pi} \quad (5.3)$$

Con vista a la obtención de resultados numéricos proponemos en la expresión (1.1) $A=1$, $m=1$ e investigamos los resultados para $ka = \frac{3\pi}{2}$. En este caso y en virtud de que

$$\gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\kappa^2 - n^2}, \quad (5.4)$$

queda claro que las ondas que se propagan en la guía son solamente los primeros sumandos en las series de las expresiones (1.4) y (1.5). Por consiguiente, para los coeficientes de reflexión y refracción se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{1}{a\gamma_1} \int_{-L}^L \left[f_2(z) \cos(\gamma_1 z) + f_1(z) \operatorname{sen}(\gamma_1 z) \right] dz - \\ & - \frac{i}{a\gamma_1} \int_{-L}^L \left[f_1(z) \cos(\gamma_1 z) - f_2(z) \operatorname{sen}(\gamma_1 z) \right] dz, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$T_1 = A + \frac{1}{a\gamma_1} \int_{-L}^L \left[f_2(z) \cos(\gamma_1 z) - f_1(z) \operatorname{sen}(\gamma_1 z) \right] dz -$$

$$- \frac{i}{a\gamma_1} \int_{-L}^L \left[f_1(z) \cos(\gamma_1 z) + f_2(z) \operatorname{sen}(\gamma_1 z) \right] dz ,$$

donde $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$.. Las integrales en las fórmulas (5.5) y (5.6) se calculan numéricamente.

El patrón de emisión fue llevado a la siguiente expresión numérica para su cálculo

$$D(\varphi) = 2 \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{k\Delta z}{2} \operatorname{sen} \varphi \right]}{k \operatorname{sen} \varphi} \sum_{n=1}^N \left\{ f_{1n} \cos \left[kz_n \operatorname{sen} \varphi \right] - f_{2n} \operatorname{sen} \left[kz_n \operatorname{sen} \varphi \right] \right\} +$$

$$+ i2 \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{k\Delta z}{2} \operatorname{sen} \varphi \right]}{k \operatorname{sen} \varphi} \sum_{n=1}^N \left\{ f_{2n} \cos \left[kz_n \operatorname{sen} \varphi \right] + f_{1n} \operatorname{sen} \left[kz_n \operatorname{sen} \varphi \right] \right\} . \quad (5.7)$$

Las expresiones numéricas de los elementos del sistema de ecuaciones algebraicas a resolver son:

$$\varphi_j = \cos(\gamma_1 z_j) + i \operatorname{sen}(\gamma_1 z_j) \quad (5.8)$$

y, como $ka = \frac{3\pi}{2}$, el núcleo del sistema tiene la forma:

$$K_{jii} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} |\alpha_i - z_j|}}{a\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\gamma_1 |\alpha_i - z_j|)}{a\gamma_1} - \frac{1}{2} \operatorname{Im} H_0^{(1)}(k|z_j - \alpha_i|) +$$

$$+ i \left\{ \frac{\cos(\gamma_1 |\alpha_i - z_j|)}{a\gamma_1} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} H_0^{(1)}(k|z_j - \alpha_i|) \right\} . \quad (5.9)$$

En la programación tomamos $N = 30$ y tenemos en consideración el hecho de que

$$\alpha_i = z_i = -L + \frac{\Delta z}{2} + (i - 1)\Delta z ,$$

$$2L = N\Delta z .$$

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para la solución numérica se utilizó la microcomputadora NEC PC-9801 F con programas del autor escritos en lenguaje BASIC N-88. Los cálculos fueron realizados para las variantes siguientes.

1. $a = 100 L$. Este es el caso de una ranura muy estrecha practicada en la pared de la guía. A través de la ranura se irradia solamente el 2.36% de la energía incidente y el patrón de emisión de la ranura tiene la forma dipolar esperada que se muestra en la fig. 4.
2. $a = 10 L$. En este caso a través de la ranura se irradia al exterior el 10.3% de la energía incidente y en el patrón de emisión de la ranura, mostrado en la fig. 5, se aprecia la diferencia esperada con respecto al patrón dipolar, con un corrimiento del máximo de la energía irradiada hacia la zona de valores negativos del ángulo ϕ .
3. $a = L$. En este caso la energía irradiada a través de la ranura constituye el 71.7 % de la energía incidente. El patrón de emisión, mostrado en la figura 6, permite apreciar el carácter cada vez más direccional de la antena de ranura. La mayor cantidad de energía se irradia en la dirección $\phi = -\frac{\pi}{5}$.

El paso elegido de la partición del segmento $(-L, L)$ permite afirmar que los resultados aquí expuestos son satisfactorios. Sin embargo, para valores mayores de $\frac{L}{a}$ resulta insuficiente. Un intento de cálculo, por ejemplo, para valores de $a = L/10$ dio como resultado que no se logra destacar suficientemente la singularidad regularizadora del núcleo de la ecuación integral, por lo que los resultados obtenidos para esta variante no resultan confiables. No obstante, lo más importante es que el algoritmo de solución del problema planteado sigue siendo válido y por tanto para obtener buenos resultados para valores mayores de $\frac{L}{a}$ que los reportados en el presente trabajo solamente es necesario aumentar el número de puntos en la partición del segmento $(-L, L)$, disminuyendo así el paso de dicha partición, lo cual puede lograrse utilizando máquinas computadoras de mayor capacidad.

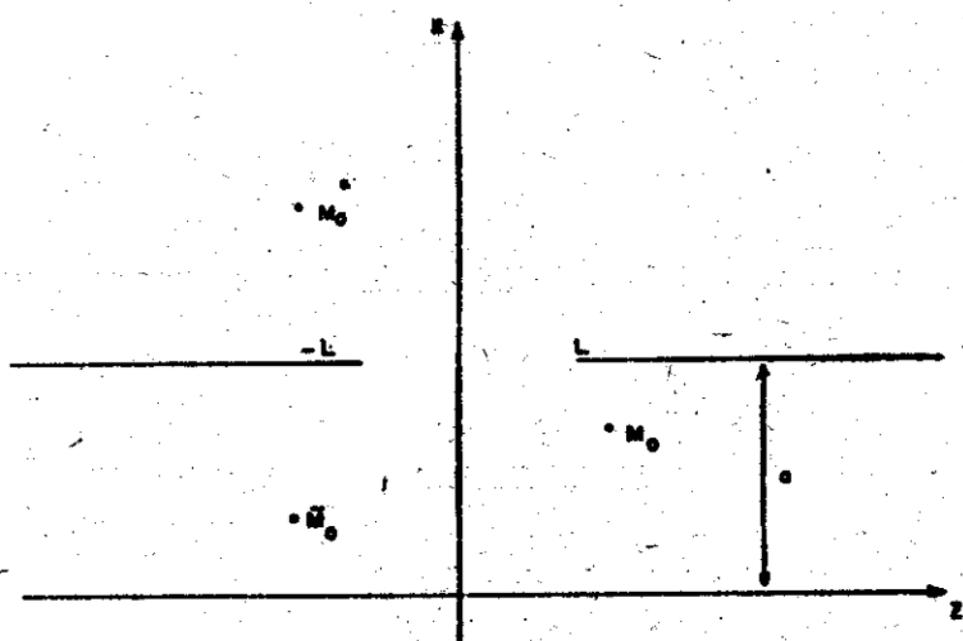


Figura 1

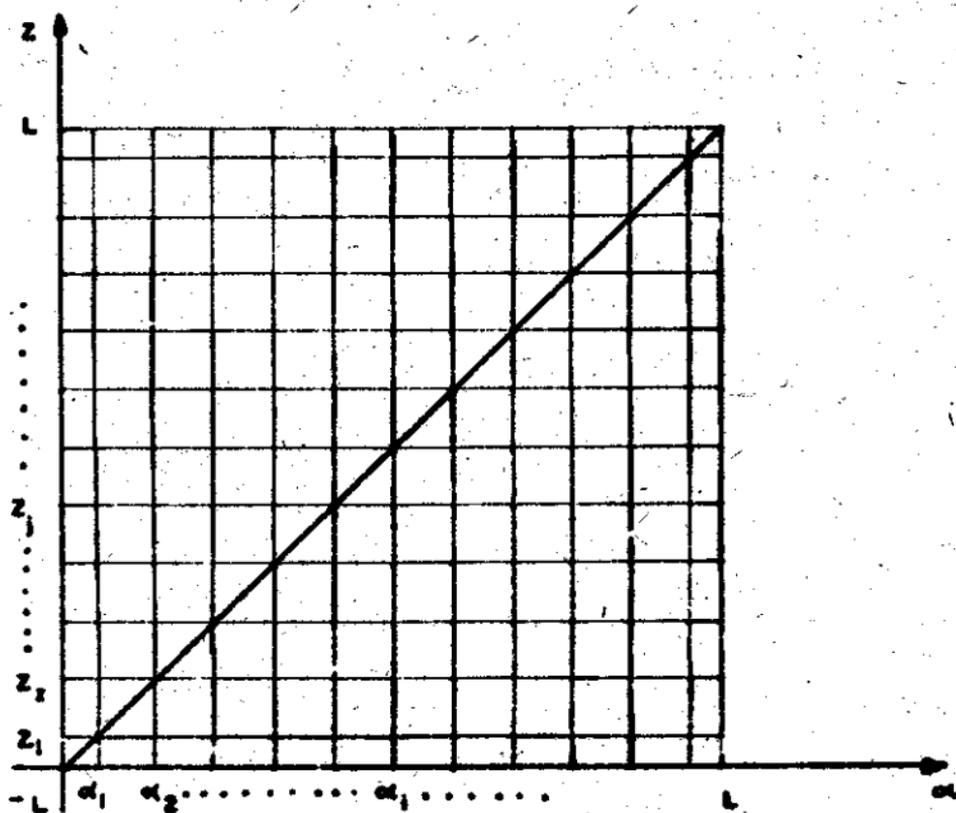


Figura 2

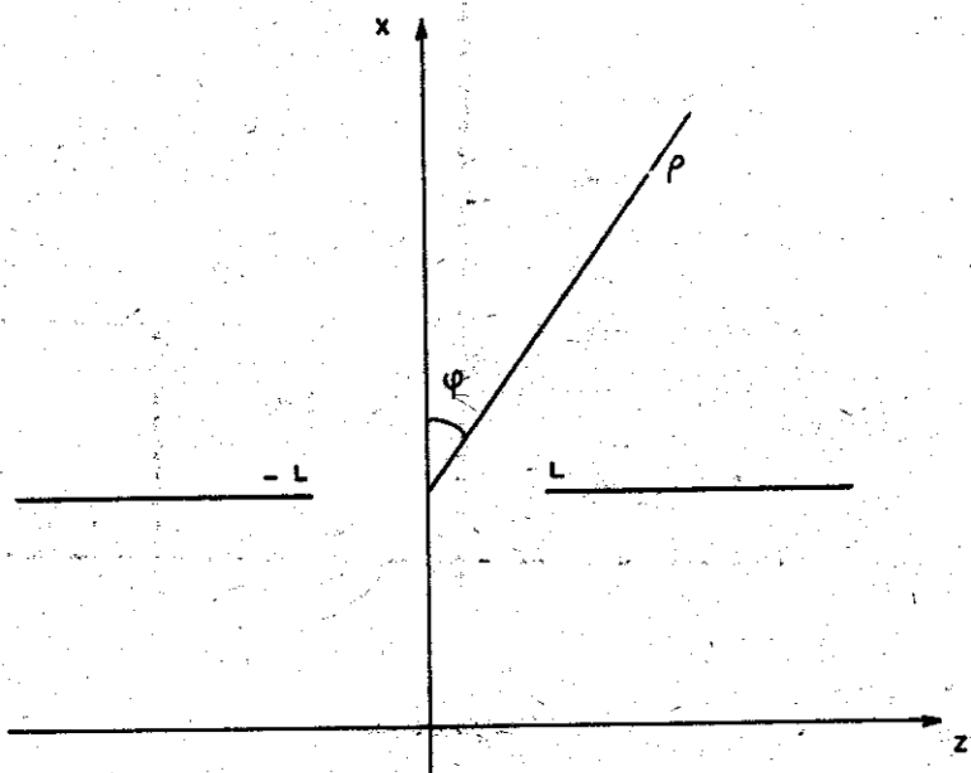


Figura 3

PATRÓN DE EMISIÓN

$L = 1$

$A = 100 \approx L$

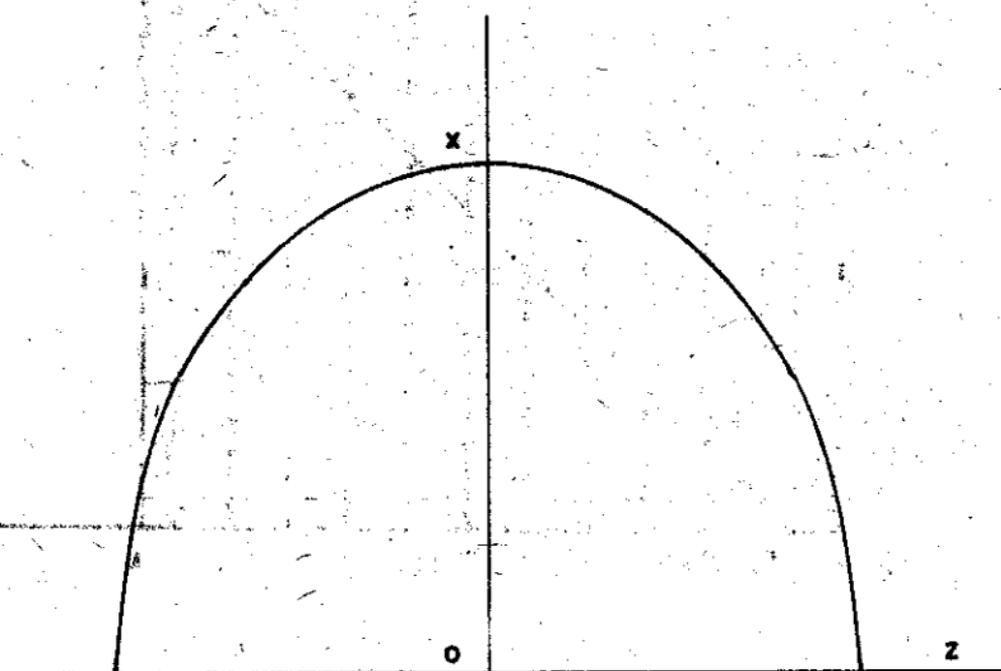


Figura 4

PATRÓN DE EMISIÓN

$L = 1$

$A = 10 = L$

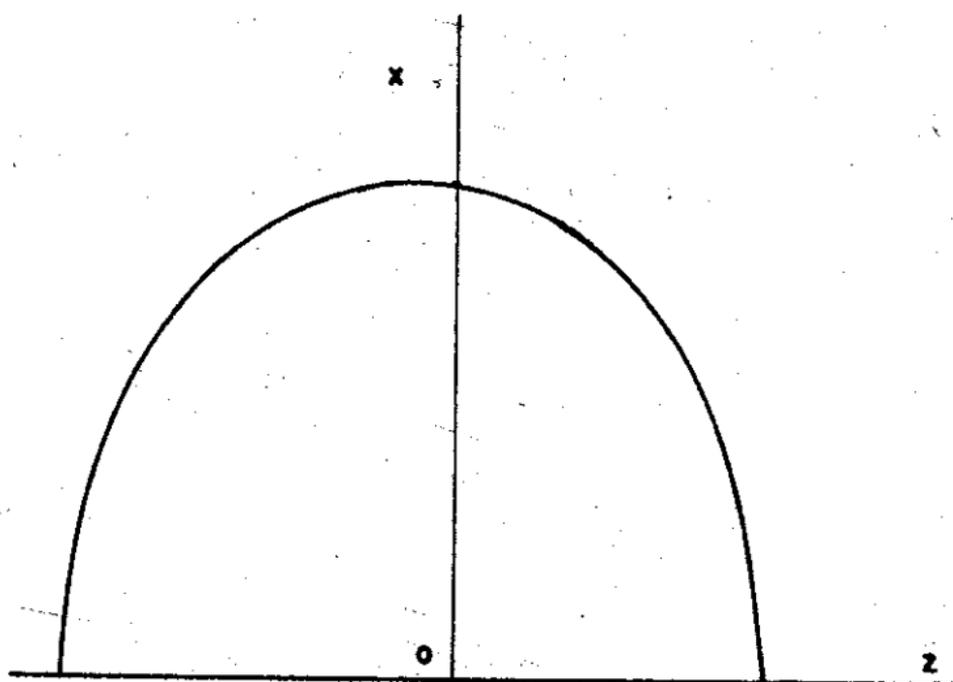


Figura 5

PATRÓN DE EMISIÓN

$L = 1$

$A = 1$

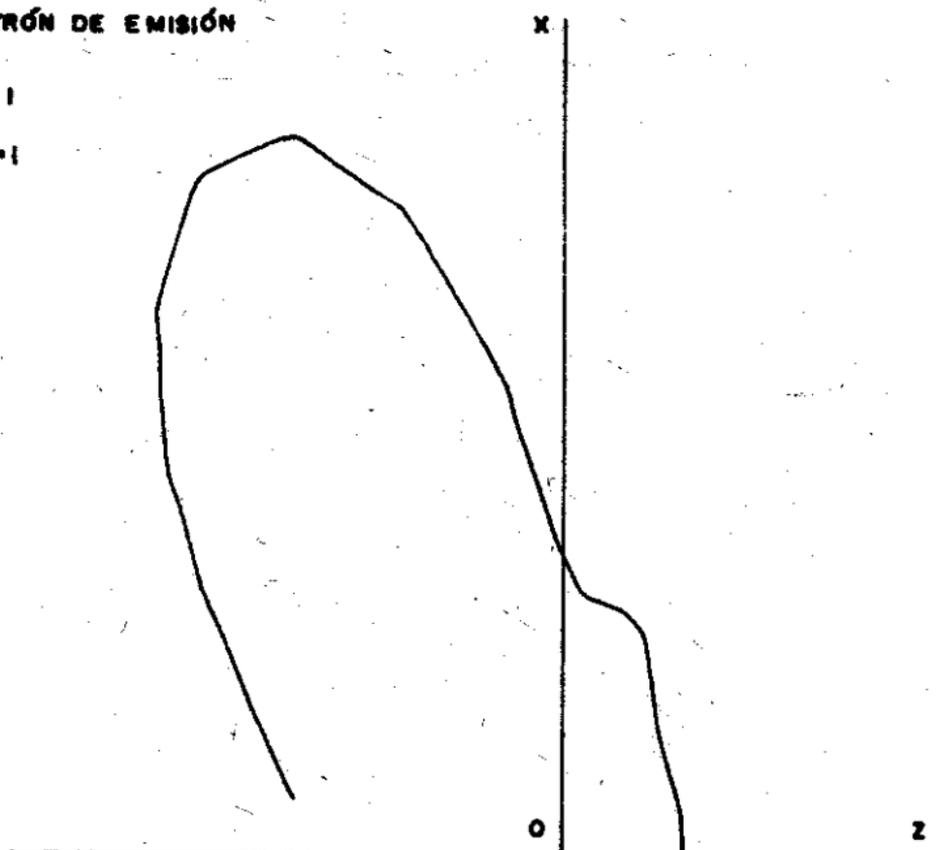


Figura 6

1. Kaznachejev, Y.I.
Comunicaciones de larga distancia en guías de ondas. Moscú. Editorial de la AC de la URSS, 1959.
2. Levinson, I.B. y P.S.Fridberg
Uniones de ranuras en guías de ondas rectangulares homogéneas. *Radiotécnica y Electrónica*. Tomo 11, 5, 1966, 831-838; *Radiotécnica y Electrónica*. Tomo 11, 6, 1966, 1076-1085.
3. Dorfman, L.G. y V.V.Filatov
Sobre los parámetros eléctricos de los puentes de ranura en guías de ondas. *Radiotécnica y Electrónica*. Tomo 11, 11, 1966, 1933-1943.
4. Evstropov, G.A. y S.A.Tsarapkin
Cálculo de antenas de ranura en guías de ondas teniendo en cuenta la interacción de los emisores respecto a la onda principal. *Radiotécnica y Electrónica*. Tomo 11, 5, 1966, 822-830.
5. Feld Y.N.
Fundamentos de la teoría de antenas de ranura. Moscú. *Radio Soviética*, 1948.
6. _____
Sistemas irradiantes de ranuras. *Doklady AC URSS*, 1946, Tomo 53, 7, 619-622.
7. _____
Antenas de ranura. *Jurnal Teoreticheskoy Fiziki*, 1947, Tomo 17, 1051-1065.
8. Levinson, I.B. y P.S.Fridberg
Unión electromagnética entre dos volúmenes a través de una ranura estrecha. *Radiotécnica y Electrónica*, 1965, Tomo 10, 2, 260-268.
9. Levinson, I.B., S.S.Fel y P.S.Fridberg
Una ecuación integral para el campo de apertura en una unión electromagnética entre dos volúmenes. *Doklady AC URSS*, 1963, Tomo 153, No. 2, 310-312.
10. Vainstein, L.A.
Ondas de corriente en un conductor cilíndrico fino. *Jurnal Teoreticheskoy Fiziki*, 1961, Tomo 31, 1, 29-44.
11. Harold Levine, Julian Jchwinger
On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. *Physical Review*, 1948, V. 74, No.8, 958-974; *Physical Review*, 1949, V. 75, No.9, 1423-1432.
12. Fialkovsky, A.T.
Difracción de ondas electromagnéticas planas en una ranura y en una franja. *Radiotécnica y Electrónica*, 1966, Tomo 11, 2, 178-186.

13. Kostrov, B.V. y E.I.Nefedov
Difracción en una ranura ancha en una gufa de ondas ancha. *Radio-técnica y Electrónica*, 1964, Tomo 9, 4, 649-659.
14. Tfjonov, A.N.
Sobre la regularización de problemas incorrectamente planteados y un método de regularización. *Doklady AC URSS*, 1963, Tomo 153, No.1, 49-52.
15. _____
Sobre la solución de problemas incorrectamente planteados y un método de regularización. *Doklady AC URSS*, 1963, Tomo 151, No.3, 501 -504.
16. Lávrientiev, M.M.
Sobre la solución de algunos problemas incorrectamente planteados. Novosibirsk, 1963.
17. Marfn, J. y V.M.Repin
La difracción de ondas electromagnéticas en varias ranuras. Caso plano. *Métodos Numéricos y Programación*, edición XIII. Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1969.
18. Noble, B.
El Método de Winer-Hopf. Moscú. I.L., 1962.

Recibido: 9 de junio de 1986.