Estructura interna e interacción de los solitones

Jorge A. González, Departamento de Física, Universidad de Camagüey

RESUMEN

Se obtiene el potencial de interacción solitón-antisolitón (Teoría φ^4). Se demuestra que la estructura interna del solitón se comporta como un resorte relativista elástico.

ABSTRACT

The soliton-antisoliton interaction potential is obtained (φ^4 theory). It is proved that the internal structure of the soliton behaves as a relativistic string.

1. Un buen resumen temático sobre la aplicación de los solitones en la teoría del campo se puede encontrar en los reportes de Makhankov [1,2].

En los trabajos del autor de la presente comunicación [3,5] se investigó la ecuación general no lineal,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - R'\frac{\partial\varphi}{\partial t} + G(\varphi) = 0 \qquad (1)$$

demostrándose las condiciones necesarias para la existencia de ondas solitarias. Se estudiaron además, todos los tipos posibles de estas ondas.

Para el caso particular

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - R'\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\varphi + \beta\varphi^3 = h \qquad (2)$$

que es la ecuación de la teoría del campo φ^4 forzada por un campo externo h y una fuerza disipativa, fueron obtenidas las soluciones exactas.

Como resultado de todos estos trabajos podemos decir lo siguiente:

Cuando $h = R' = 0$ la ecuación (2) tiene soluciones en forma de solitones y antisolitones libres moviéndose a velocidad constante V:

$$\varphi = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\ \text{th}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{x-Vt-X_o}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right), \tag{3}$$

Aquí th representa la tangente hiperbólica, x_o es una constante arbitraria que determina la posición inicial del solitón.

Si la fuerza externa h es *conectada* (supongamos para mayor definición $h>0$) el solitón será acelerado hacia la *derecha* (en dirección positiva del eje X) mientras que el antisolitón recibirá una aceleración en sentido contrario.

El comportamiento es newtoniano (relativista) [6].

Si $h \neq 0$ la ecuación (2) también posee una solución correspondiente a un estado estacionario (V=0)

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2P}\ (P - 3y^2)}{(P-y^2)e^{k} + P\ e^{-k} + 2y\ \sqrt{2P}} + y \tag{4}$$

donde

$$P = -\frac{\alpha}{\beta}\ , \qquad K = \sqrt{\beta(P - 3y^2)}\cdot(X-X_o)$$

La magnitud y es una de las raíces $y_3 < y_1 < y_2$ de la ecuación cúbica $\alpha\varphi+\beta\varphi^3 = h$ en dependencia del signo de h. Si $h > 0$, $y=y_2$, si $h<0$, $y=y_3$.

En lo adelante supondremos $h > 0$ $(h^2 < -\frac{4}{27}\frac{\alpha^3}{\beta})$.

La función (4) tiene la siguiente propiedad

$$\varphi \to y_2 \quad , \qquad x \to \pm\infty$$

Es decir, tiende al mismo valor en $+\infty$ y en $-\infty$ y posee un mínimo

$$\varphi_{min} = \sqrt{2(P - y_2^2)} - y_2$$

2. Un estudio detallado de la función (4) nos permite ver que es semejante a un estado ligado de un solitón y un antisolitón que se encuentran a cierta distancia uno del otro (ver [3-5]).

Comúnmente se define el punto de inflexión de la función $\varphi(x)$ como el centro de masa del solitón, por lo que la distancia entre el solitón y el antisolitón estará dada por la separación geométrica de los dos puntos de inflexión de la función (4).

Esta distancia R se puede calcular como

$$R = \frac{2 \text{ arc ch}\left(\frac{M}{y_1 - y_2} - N\right)}{\sqrt{\beta (P-3y_2^2)}} \qquad (5)$$

donde

$$M = \frac{2\sqrt{2P}\ (P-3y_2^2)}{\sqrt{P(P-y_2^2)}}, \quad N = \frac{2\sqrt{2P}\ y_2}{P-y_2^2} \qquad (6)$$

Con el aumento de h disminuye la distancia entre el solitón y el antisolitón y se hace más evidente su deformación (ver [3-5]).

La causa de la deformación es la interacción entre ellos.

Esta interacción tiene carácter de atracción.

Este estado estacionario de un solitón y un antisolitón puede existir debido a que, aparte de la fuerza de atracción entre ellos, está presente la fuerza externa h que sobre el solitón actúa hacia la *derecha* y sobre el antisolitón en sentido contrario.

La distancia R de la expresión (12) es la crítica para que se equilibren la fuerza de atracción de los solitones y la fuerza externa que los separa.

El sentido común nos dice que este estado de equilibrio es inestable y efectivamente: la inestabilidad de la solución (4) ha sido establecida por el autor [3-5].

Sin embargo, su existencia nos permite calcular la dependencia de la fuerza de atracción (que en el equilibrio coincide con h) respecto a la distancia que separa a los solitones.

La fórmula (5) nos da esta dependencia aunque de forma no explícita.

Un estudio de (5) nos ofrece la siguiente información: la fuerza de atracción h(R) posee un máximo en el origen

$$h(o) = \alpha\sqrt{-\frac{4\alpha}{27\beta}} \qquad (7)$$

y decrece exponencial con la distancia

$$h(R) \sim e^{-\sqrt{\alpha}\, R} \qquad (8)$$

3. Ahora utilizaremos a (4) para investigar la estructura interna del solitón.

Definamos primeramente el *tamaño* del solitón para poder hablar de estructura interna.

La función (3) tiende exponencialmente en $+\infty$ y en $-\infty$ a los valores del vacío ($\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$) en los cuales la energía es cero.

Estos valores se alcanzan más rápidamente entre mayor sea el valor de $\sqrt{2\alpha}$ (este es el coeficiente delante de la X en el exponente). Por eso usualmente se define como radio del solitón el valor

$$R_s = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \tag{9}$$

El solitón y el antisolitón que están involucrados en el estado ligado (4), sufren una deformación debido al par de fuerzas que actúan sobre ellos en sentidos contrarios.

El nuevo radio del solitón deformado será

$$R_{s\ def} = \frac{1}{\sqrt{\beta(P-3y_2^2)}} \tag{10}$$

Para una fuerza externa h pequeña ($h << \alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$) tenemos

$$R_{s\ def} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(1 + \frac{3h}{4\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right) \tag{11}$$

Lo que quiere decir que la deformación respecto al estado inicial de un solitón no perturbado (3) es

$$\Delta R = \frac{3}{4}\sqrt{-\frac{\beta}{2}}\,\frac{h}{\alpha^2} \tag{12}$$

¡La estructura interna del solitón resulta ser elástica!

(La deformación es proporcional a la fuerza externa).

Esto conlleva a que la estructura interna del solitón se comporte dinámicamente como un resorte relativista.

Los experimentos numéricos y análisis perturbativos realizados por Makhankov [1,2] para estudiar la estabilidad del solitón (3) confirman la existencia de oscilaciones del radio del solitón como reacción a pequeñas perturbaciones.

La fórmula exacta (10) nos permite conocer la deformación del radio del solitón para campos externos muy intensos.

Puede considerarse que este resorte es el que mantiene unidos a los *quarks* que forman el solitón.

BIBLIOGRAFIA

1. Makhankov, V.G.
   Phys. Rep. 35, pág. 1 (1978).
2. Makhankov, V.G.
   Fizika elementarnij chastits i atomnogo yadra-Dubna. Vol. 14, No. 1, pág. 1 (1983).
3. González, J.A.
   ICTP, Trieste, Int. Report. IC/86/79 (1986).
4. González, J.A. y J.A. Holyst
   ICTP, Trieste, Int. Report IC/86/122 (1986).
5. González, J.A. y J.A. Holyst
   Physical Review B Vol. 35 No. 7, pág. 3643 (1987).
6. Dash, P.C.
   Phys. Lett. 109 A, pág. 307 (1985).