

Estados localizados de tipo solitones en la teoría de transiciones de fase bajo la acción de un campo externo constante

Jorge A. González, Universidad de Camagüey

RESUMEN

Se investiga la ecuación diferencial no lineal de Guinzburg-Landau para las transiciones de fase con la presencia de un campo externo efectivo. Se obtienen las condiciones necesarias para que la ecuación tenga soluciones de tipo solitón. Se halla la solución exacta que describe un bell-solitón. Este se forma cuando el campo externo efectivo es desigual de cero. Se estudian las características del bell-solitón. Se calcula la energía y se investiga la estabilidad.

ABSTRACT

The non-linear differential equation of Guinzburg and Landau is investigated for the phase transitions in an effective external field.

The necessary conditions which give rise to solutions of the soliton type are obtained.

The exact solution that describes a bell soliton is found. It exists when the external field is not equal to zero. Its characteristics are studied; the energy is calculated, the stability is investigated.

INTRODUCCIÓN

En la física estadística moderna las transiciones de fase ocupan un lugar importante. Las transiciones de fase de primer tipo se caracterizan por la creación de determinadas formaciones localizadas de la nueva fase dentro de la anterior. La energía y otras características del sistema sufren un salto escalonado.

A la investigación de las propiedades de estas formaciones se han dedicado varios trabajos teóricos y experimentales [1-9]. Dentro de ellos una especial atención merecen los trabajos basados en la teoría fenomenológica de Landau [10].

En el presente artículo se partirá del formalismo de la teoría del campo tomando como base la lagrangiana:

$$L = D \left\{ \frac{1}{2C^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \varphi|^2 + \frac{\alpha'}{2} \varphi^2 + \frac{\gamma'}{3} \varphi^3 + \frac{\beta'}{4} \varphi^4 - h' \varphi + R \right\} \quad (1)$$

Aquí D , C , α' , γ' , β' son constantes respecto a las coordenadas y al tiempo y dependen de las características físicas específicas del sistema.

$$R = h' \varphi - \frac{\alpha'}{2} \varphi^2 - \frac{\gamma'}{3} \varphi^3 - \frac{\beta'}{4} \varphi^4$$

φ es la función del campo que va a jugar el papel de parámetro de orden para describir la transición de fase.

h' es el campo externo.

La lagrangiana (1) cuando $h = \gamma = 0$ representa el modelo de Guinzburg Landau, también conocido como modelo de Higgs. Representemos (1) como:

$$L = D \left\{ \frac{1}{2C^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \varphi|^2 - U(\varphi) \right\} \quad (2)$$

En este modelo $U(\varphi)$ posee un máximo y dos mínimos. Precisamente entre esos dos estados estables se supone que ocurre la transición de fase.

Si consideramos $\alpha\gamma' = 0, h'$ constante, entonces los mínimos de $U(\varphi)$ son asimétricos (uno es más alto que el otro) y la probabilidad de los estados es diferente.

La transición entre estos estados es de primer tipo.

Esta teoría es aplicable a las transiciones de fase termodinámica con temperatura crítica finita.

En cada caso el parámetro de orden φ y los coeficientes de la ecuación pueden tener diferente sentido.

Por ejemplo, en la transición de fase vapor-líquido φ juega el papel de la densidad, $U(\varphi)$ es la energía libre del sistema en función de la

densidad y el campo externo h' es proporcional a la presión [5] (Los coeficientes α' , γ' , β' dependen de la temperatura).

Al analizar las transiciones estructurales en cuerpos sólidos ϕ representa el desplazamiento de los átomos de su posición de equilibrio en el cristal, mientras $U(\phi)$ es el potencial en el cual ellos se mueven debido a la interacción mutua [1].

Si estudiamos las transiciones en ferromagnéticos ϕ sería el momento magnético $U(\phi)$ la energía libre, h un campo magnético externo [10].

El trabajo está distribuido de la siguiente forma:

En la primera parte se hará una investigación cualitativa de la ecuación para mostrar qué tipos de soluciones tiene.

Nos van a interesar principalmente soluciones localizadas que pueden describir formaciones interfásicas.

Luego se estudiará la función-solución y se le dará una interpretación física. Se calculará la energía de la formación y se investigará su estabilidad.

ESTADOS LOCALIZADOS

De la lagrangiana (1) se deduce la siguiente ecuación:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \alpha'\phi + \gamma'\phi^2 + \beta'\phi^3 = h' \quad (3)$$

Vamos a considerar que el sistema es cuasiunidimensional (ϕ va a depender sólo de la coordenada x' y el tiempo t):

$$\frac{\partial^2\phi}{x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \alpha'\phi + \gamma'\phi^2 + \beta'\phi^3 = h \quad (4)$$

Nos interesan soluciones que se desplazan a lo largo del eje X' con una velocidad constante v . Por eso introducimos el argumento $x = x' - vt$

La ecuación (4) toma la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha\phi + \gamma\phi^2 + \beta\phi^3 = h \quad (5)$$

Donde $\alpha = \frac{\alpha'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\gamma = \frac{\gamma'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\beta = \frac{\beta'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $h = \frac{h'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

La ecuación (5) será investigada con ayuda de los métodos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Los puntos críticos (ver [9] y [11]) en el plano de fase $\left(\frac{d\phi}{dx}, \phi\right)$ están dados por las siguientes condiciones

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

$$\alpha\varphi + \gamma\varphi^2 + \beta\varphi^3 = h$$

(6)

Podemos transformar la ecuación cúbica (6) con la sustitución

$$\varphi = y - \frac{\gamma}{3\beta}$$

y obtenemos

$$y^3 - py + q = 0$$

$$p = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma^2}{3\beta^2}, \quad q = \frac{2\gamma^3}{27\beta^3} - \frac{\alpha\gamma}{3\beta^2} - \frac{h}{\beta}$$

(7)

Las raíces de la ecuación (7) se expresan por las fórmulas

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} (u + v)$$

$$y_2 = -\frac{1}{6} (u + v) - \frac{\sqrt{3}}{6} (u - v) i$$

$$y_3 = -\frac{1}{6} (u + v) + \frac{\sqrt{3}}{6} (u - v) i$$

(8)

donde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{27}{2} q + \frac{3}{2} \sqrt{27 q^2 - 4 p^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{27}{2} q - \frac{3}{2} \sqrt{27 q^2 - 4 p^3}}$$

La ecuación (5) posee soluciones localizadas si en el plano de fase

$\left(\frac{d\varphi}{dx}, \varphi\right)$ existen tres puntos críticos.

Por ejemplo dos puntos de ensilladura y un centro.

En los trabajos [9] y [11] del autor se da una explicación detallada de este aspecto.

Y bien, para que existan tres puntos críticos es necesario que la ecuación cúbica (7) tenga tres raíces, que se cumple cuando

$$\frac{q^3}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

(9)

Esto es equivalente al hecho de que el potencial $u(\varphi)$ en (2) posee dos mínimos y un máximo.

La condición (9) determina el intervalo de valores de h que permiten la existencia de soluciones localizadas:

$$h_2 < h < h_1$$

$$h_{1,2} = \frac{2}{27} \frac{\gamma^3}{\beta^2} - \frac{\alpha\gamma}{3\beta} \pm \sqrt{\frac{4}{27} \beta^2 \left(-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma^2}{3\beta^2} \right)^3} \quad (10)$$

En adelante tomaremos $\alpha > 0$, $\beta < 0$ que se corresponden con la teoría de Landau inicial.

Si $h = 0$ la condición (9) siempre se cumple.

Cuando $\gamma = 0$, $h \neq 0$. Es necesario $h^2 < -\frac{4}{27} \frac{\alpha^3}{\beta}$.

Es decir existe un valor crítico $h_L^2 = -\frac{4}{27} \frac{\alpha^3}{\beta}$ que si $|h| > |h_L|$ entonces no existen soluciones localizadas.

Cuando $\gamma = 0$ y $h^2 \ll -\frac{4}{27} \frac{\alpha^3}{\beta}$, las raíces de (7) se pueden aproximar hasta el primer orden con respecto a h :

$$y_1 \approx \frac{h}{\alpha}, \quad y_2 \approx \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{h}{2\alpha}, \quad y_3 \approx -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{h}{2\alpha} \quad (11)$$

Realizando el cambio de variable $\phi = \psi - \frac{\gamma}{3\beta}$ en (5) obtenemos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - p\psi + \beta\psi^3 = -\beta q \quad (12)$$

Este resultado permite ver que la presencia del miembro $\gamma\phi^2$ en la ecuación es equivalente a la creación de cierto campo externo efectivo

$$h_{ef} = h + \frac{\alpha\gamma}{3\beta} - \frac{2\gamma^3}{27\beta^2} \equiv -\beta q \quad (13)$$

y a la reestructuración de las constantes α y β .

Multipliquemos la ecuación (5) por $\frac{d\phi}{dx}$ e integremos una vez con respecto a dx .

$$\text{Resulta } \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \frac{\gamma}{3} \phi^3 + \frac{\beta}{4} \phi^4 = h\phi + A$$

$A = \text{const.}$

De aquí fácilmente se calcula la primera integral de la ecuación.

$$x - x_0 = \frac{d\phi}{\sqrt{A + h\phi - \alpha\phi^2 - \frac{2\gamma}{3}\phi^3 - \frac{\beta\phi^4}{2}}}$$

Esta integral contiene todas las soluciones de la ecuación.

Las soluciones que describen estados localizados se dan por la expresión.

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2P} (P - 3y^2)}{(P - y^2)e^k + Pe^{-k} + 2y\sqrt{2P}} + y - \frac{y}{3\beta} \quad (14)$$

donde

$$k = \sqrt{\beta(P - 3y^2)} (X - X_0), \quad X_0 = \text{const}$$

(Ver (7) y (8)).

La magnitud Y es una de las raíces de la ecuación cúbica (7). Cuando $q > 0$, $Y = Y_2$, cuando $q < 0$, $Y = Y_3$.

La solución (14) se puede comprobar con una simple sustitución en (5).

Si $q \neq 0$ el gráfico de la función (14) tiene forma de campana con una asíntota horizontal que coincide para $X \rightarrow \infty$ y $X \rightarrow -\infty$. Cuando $q > 0$ la campana está invertida.

Este tipo de soluciones con estas características recibe el nombre inglés de bell-soliton (Figura 1).

El extremo (mínimo cuando $q > 0$) del bell-soliton se expresa por la fórmula.

$$\varphi_m = \sqrt{2(P - y^2)} - y \quad (15)$$

Mientras que $\varphi \rightarrow y - \frac{y}{3\beta}$ cuando $x \rightarrow \pm \infty$.

Sea $q = 0$. Entonces $Y = -Y_3 = Y_2 = \sqrt{P}$ (Vea (7) y (8)).

La solución (14) se convierte en la conocida

$$\varphi = \sqrt{P} \tanh \sqrt{-\frac{\beta P}{2}} (X - X_0) - \frac{y}{3\beta} \quad (16)$$

En este caso el gráfico de la función-solución tiene forma de escalón con diferente comportamiento asintótico en $+\infty$, $-\infty$ (Figura 2).

$$\varphi \rightarrow \sqrt{P} - \frac{y}{3\beta}, \quad X \rightarrow \infty$$

$$\varphi \rightarrow -\sqrt{P} - \frac{y}{3\beta}, \quad X \rightarrow -\infty$$

Las soluciones con estas características se llaman kink-soliton.

Una buena recopilación de trabajos sobre estos solitones se puede encontrar en [12].

La función

$$\varphi = -\sqrt{P} \tanh \sqrt{-\frac{\beta P}{2}} (X - X_0) - \frac{y}{3\beta} \quad (17)$$

También es solución de (5) cuando $q = 0$.

Su gráfico sería un escalón con sentido contrario al representado en la Figura 2.

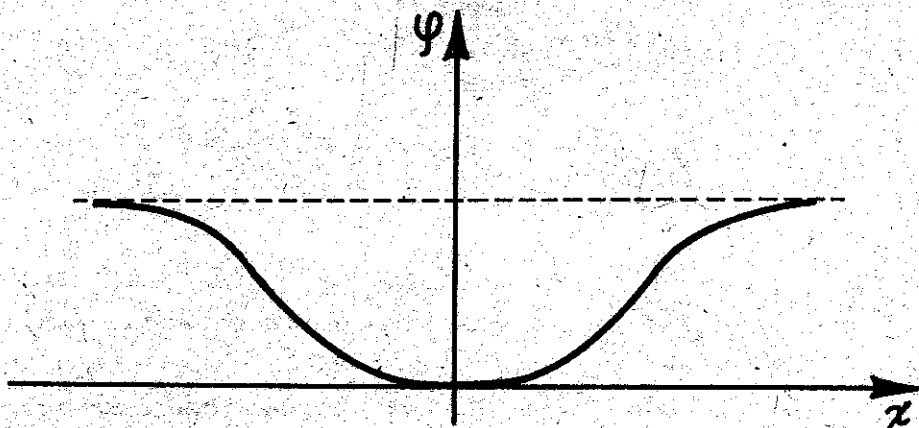


FIG. 4 Gráfico de la solución de la ecuación (5) para el caso $q > 0$ (Bell - Solitón)

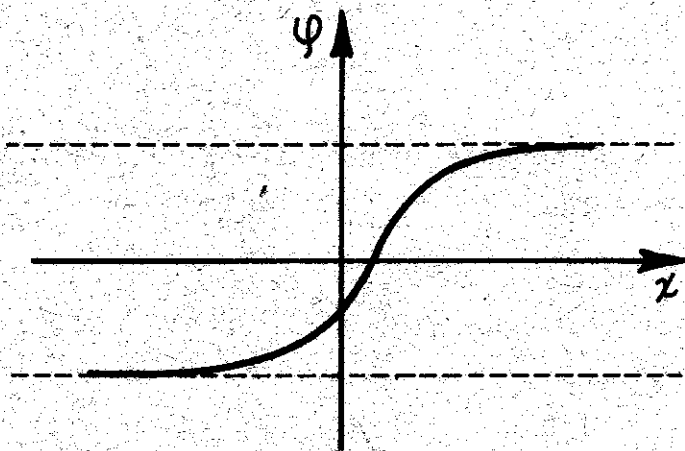


FIG. 2 Gráfico de la solución de la ecuación (5) en el caso $q = 0$ (Kink - Solitón)

A esta solución se le llama antikink-solitón.

Ahora, observemos la solución (14) calculada en este trabajo. Su forma es de dos escalones con sentido opuesto.

Podemos interpretarla como un estado ligado de dos kinks (un kink y un antikink).

Es decir, describe una doble barrera que aísla un intervalo que se encuentra en una fase del espacio exterior que se encuentra en otra fase.

La distancia entre los dos kinks es inversamente proporcional a q (al campo externo efectivo).

Es necesario aclarar que se toma como distancia entre ellos o la distancia entre los dos puntos de inflexión de la función.

Cuando $q = 0$ la distancia entre los kink-solitones es *infinita* y como es natural podemos *ver* sólo a uno de ellos.

A medida que q aumenta disminuye la distancia y aumenta la deformación estructural de los kink-solitones. Esto se debe a la interacción entre ellos.

Este proceso se puede observar en la Figura 3. Los gráficos están hechos cualitativamente y siempre se ha tomado la constante X_0 (la cual surge debido a la invariancia translacional de la ecuación) de tal forma que el mínimo se encuentre sobre el eje de coordenadas vertical.

Considerando la lagrangiana (1) la función de Hamilton será

$$\dot{H} = D \left\{ \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \varphi|^2 + u(\varphi) \right\}$$

La energía de la formación localizada que se está estudiando puede ser calculada como

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} H \cdot dx \quad (18)$$

Con el aumento del campo externo efectivo y por supuesto con la disminución de la distancia entre los kink-solitones decrece la energía.

Cuando q toma su valor crítico $q_c^2 = \frac{4}{27} p^3$ los solitones kink y antikink se *aniquilan* y la solución se convierte en una recta (la energía se hace cero) $\varphi = \sqrt{\frac{P}{3}} - \frac{\gamma}{3\beta}$ (ver Figura 3).

Para hacer menos engorrosos los cálculos tomemos

$$h^2 \ll -\frac{4}{27} - \frac{\alpha^3}{\beta}, \quad \gamma = 0$$

(El resultado (12) nos dice que cualitativamente esto no cambia nada).

En una primera aproximación con respecto a h :

$$\epsilon = 2D \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\beta} \right) - \frac{2h}{\sqrt{-2\beta}} - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{-2\beta}} - \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{\alpha}} \right) \sqrt{\frac{2h}{\alpha} \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}} \right\} \quad (19)$$

El valor de la energía del kink es bien conocido

$$\epsilon_{\text{kink}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\beta} \right) D$$

Y por tanto

$$\epsilon_{\text{bell}} = 2 \epsilon_{\text{kink}} - f^*(h) \quad (20)$$

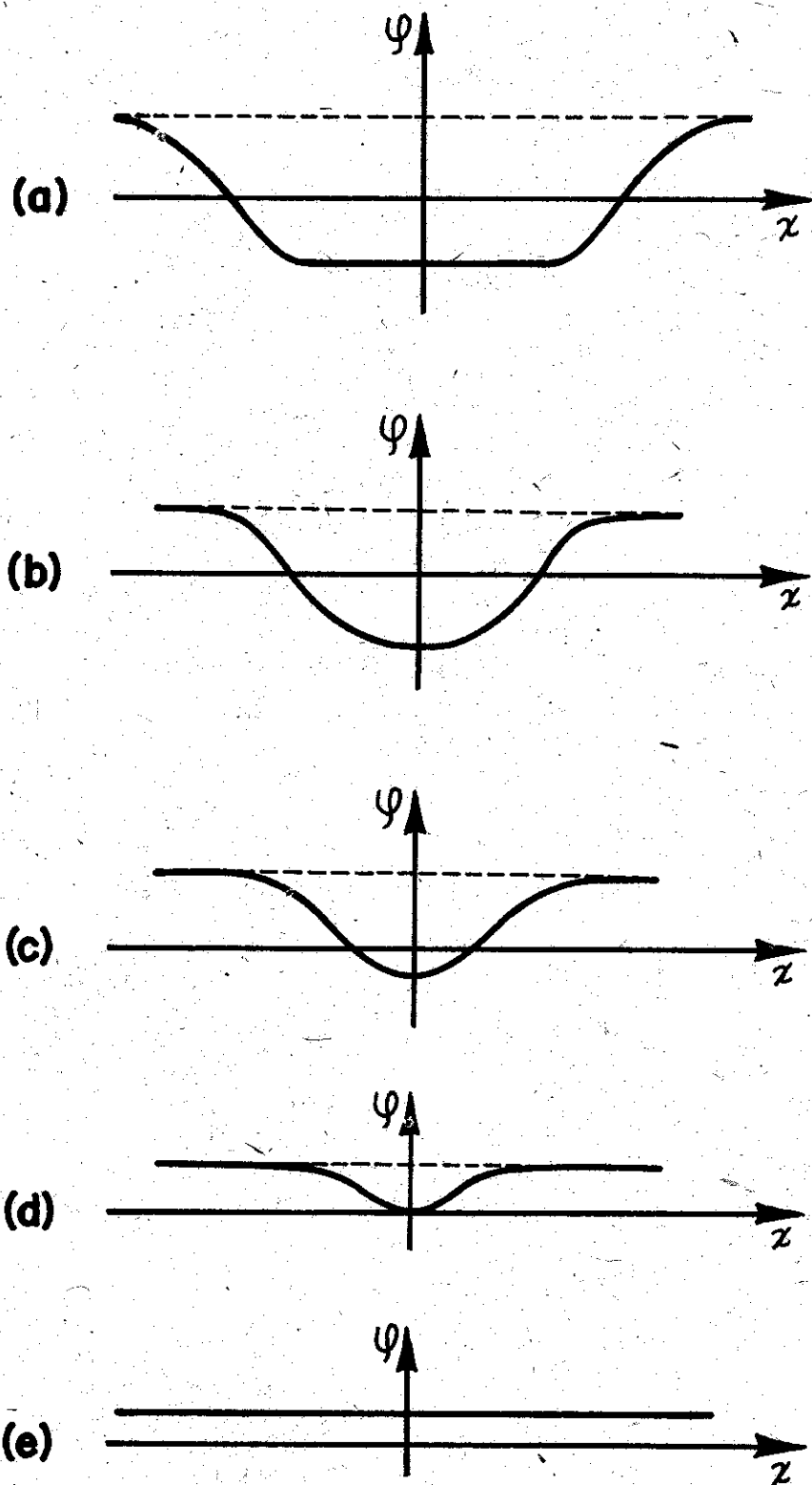


FIG. 3 A medida que aumenta q disminuye la distancia entre los kinks y aumenta la deformación estructural de los mismos.

Es decir $\varepsilon_{\text{bell}} \leq 2\varepsilon_{\text{kink}}$

Quando el campo externo es cero podemos interpretar la solución como un kink y un antikink a una distancia infinita uno del otro.

ESTABILIDAD DEL SOLITÓN

Investigaremos la estabilidad de la solución encontrada por el método tradicional [12] que se basa en el estudio de la evolución de pequeñas perturbaciones alrededor de la solución de tipo solitón encontrada φ_s .

De esta forma tenemos el siguiente problema:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha \varphi + \beta \varphi^3 = h$$

$$\varphi = \varphi_s + \bar{\varphi} \quad (21)$$

donde $|\bar{\varphi}| \ll |\varphi_s|$

Para $\bar{\varphi}$ obtenemos la siguiente ecuación linealizada

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \alpha \bar{\varphi} + 3\beta \varphi_s \bar{\varphi} = 0 \quad (22)$$

Separando las variables buscamos la solución como

$$\bar{\varphi} = f(x) e^{\lambda t}$$

donde f satisface la ecuación

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} - (\alpha + 3\beta \varphi_s) f = -\frac{\lambda^2}{c^2} f \equiv E f \quad (23)$$

El problema se ha reducido a encontrar las funciones y valores propios de un operador diferencial lineal. La ecuación (23) tiene incluso la misma forma de la ecuación de Schrodinger φ_s satisface la ecuación

$$\frac{d^2 \varphi_s}{dx^2} + \alpha \varphi_s + \beta \varphi_s^3 = h \quad (24)$$

Derivando (24) con respecto a X resulta

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\varphi_s}{dx} \right) + (\alpha + 3\beta \varphi_s^2) \frac{d\varphi_s}{dx} = 0 \quad (25)$$

Y es fácil ver que $f = \frac{d\varphi_s}{dx}$ es solución de la ecuación (23) cuando $\lambda = 0$.

El modo cero encontrado existe debido a la simetría de traslación de la ecuación.

Cuando $h \neq 0$ ϕ_s es un bell-soliton, por lo tanto $\frac{d\phi_s}{dx}$ tiene un cero y debe existir un estado cuya solución no tiene ceros con menor energía.

$$\text{Es decir con } E \equiv - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0$$

Esto significa que existe un estado cuyo valor propio es positivo lo que hace inestable la solución.

En el modelo de Higgs ($h = 0$) el kink es estable (Ver [12]).

El bell-soliton obtenido aquí resulta inestable. Sin embargo es de esperar que si se presentan fuertes perturbaciones transversales (dependen de la coordenada y), estos destruyan la inestabilidad como ocurre con el bell-soliton de la ecuación de Klein-Gordon cuya estabilidad fue investigada por Makhankov en [12].

Independientemente de esto incluso las formaciones inestables tienen gran importancia en la descripción de los sistemas físicos estudiados y su aporte depende del tiempo de vida de las mismas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo la solución exacta (14) de la ecuación de Guinzburg-Landau en presencia de un campo externo efectivo (4), la cual describe estados localizados durante transiciones de fase.

Estas soluciones se identifican con formaciones en las cuales cierta parte del espacio se encuentra en una fase y el resto en otra fase.

La desigualdad (10) determina la condición necesaria entre los parámetros de la ecuación para que exista este tipo de soluciones.

En el artículo se hace un estudio completo de las características de la solución: si el campo externo efectivo es igual a cero la solución es del tipo kink-soliton. Inmediatamente que el campo externo efectivo se hace diferente de cero la solución es un bell-soliton. Esta última describe una doble barrera interfásica.

El bell-soliton que se forma también se puede analizar como un estado ligado de un kink y un antikink.

La distancia entre los kinks y la energía del estado ligado disminuyen cuando aumenta el campo externo.

En la Figura 3 se observa cómo aumenta la deformación estructural de los kinks a medida que se acercan. Esto se debe a la interacción entre ellos. El campo externo puede servir de medida de la interacción.

La energía del soliton se expresa por la fórmula (19).

Resulta que la energía del bell-solitón es menor que la energía de dos kinks tomados separadamente. La energía de enlace $\Delta\epsilon = 2\epsilon_{\text{kink}} - \epsilon_{\text{bell}}$ es una función del campo externo efectivo.

Esta energía se irradia al formarse un bell de dos kinks. Makhankov en [12] analiza la interacción entre un kink y un antikink dentro de los marcos del modelo de Higgs ($\hbar = 0$). El estado inicial que él examina es el siguiente.

$$\varphi_{\text{in}}(x,0) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \left\{ \tan h \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} (x' - V \cdot t - X_0) - \tan h \sqrt{\frac{\alpha}{2}} (x' + V \cdot t + X_0) - 1 \right] \right\} \quad (26)$$

que cualitativamente tiene la misma forma de nuestro bell-solitón.

La función (26), sin embargo, no es una solución exacta de la ecuación de Higgs. Makhankov calcula la energía en dependencia de la distancia entre los kinks y su comportamiento coincide con el aquí obtenido cualitativamente. A este estado ligado se le da el nombre de bión.

Makhankov estudia la evolución del bión por medio de computadoras.

Sería interesante examinar la evolución del bell-solitón (14) utilizando la ecuación (4).

Aquí se llegó al resultado que el bell-solitón (14) es inestable con respecto a perturbaciones longitudinales. Esto debe conducir a que el bell-solitón evolucione hacia un estado estacionario estable: el mínimo absoluto del potencial.

En la teoría de transiciones de fase esto se interpretaría de la siguiente forma: inicialmente se forma una zona finita que posee una nueva fase dentro de la vieja fase. Luego esta zona se iría extendiendo hasta ocupar todo el espacio, desapareciendo la vieja fase.

Aquí hemos analizado la ecuación en forma general ya que para cualquier tipo de transición las características analizadas son similares. Es decir estamos ante fenómenos universales. Para concretar podemos poner el siguiente ejemplo.

En las transiciones estructurales en cuerpos sólidos los kink-solitones describen las paredes de dominio interfásicas. De esta forma el Cell-solitón sería una doble pared (un estado ligado de una pared y una *anti-pared*). Este estado de equilibrio existe debido a la compensación de la fuerza de atracción entre el kink y el antikink y el campo externo que trata de separarlos.

Al estudiar la dependencia de que de la distancia entre las paredes interfásicas podemos conocer cómo se comporta el potencial de interacción entre ellas. Este comportamiento se pudiera verificar experimentalmente.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el análisis de los resultados y los comentarios críticos del profesor V. Oleynik de la Universidad de Odessa, URSS. También fueron muy útiles las discusiones del trabajo en las cuales participaron Alejandro Cabo y Augusto González del IMACC, Academia de Ciencias de Cuba.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) Bruce, A. y R. Kauly
Transiciones de fase estructurales, Moscú, Mir., 1984.
- (2) Pikin, S.A.
Transiciones estructurales en cristales líquidos. Moscú, Nauka, 1981.
- (3) Patashinsky, A.Z. y V.L. Pokrovsky
Teoría de fluctuaciones en las transiciones de fase, Moscú, Nauka, 1975.
- (4) Coleman, S.
Destino del falso vacío. Teoría semiclásica Physical Review D Vol. 15, No. 10, 1977.
- (5) Patashinsky, A.Z. y B.I. Shumilo
Teoría de la nucleación en transiciones de fase de primer tipo. Preprint del Instituto de Física Nuclear. Academia de Ciencias, URSS, Novosibirsk, 1979.
- (6) Skripov, V.P.
Líquido metaestable. Moscú, Nauka, 1972.
- (7) Kidiarov, B.I.
Cinemática de la formación de cristales en la fase líquida. Novosibirsk, Nauka, 1979.
- (8) González, J.A.
Particularidades de la nucleación durante transiciones de fase de primer tipo en un campo externo.
Trabajo de diploma. Universidad de Odessa. URSS. Presentado en el forum científico de la Universidad de Odessa, 1984.
- (9) González, J.A.
Soluciones exactas de la ecuación no lineal del campo en la teoría de sexto orden y superior. Trabajo presentado en el III Simposio de la Sociedad Cubana de Física, Santiago de Cuba, 1985.
En prensa de la Revista Cubana de Física.
- (10) Landau, L.D. e I.M. Lifshits
Física Estadística. Parte 1, Moscú, Nauka, 1976.

(11) González, J.A.

Kink-solitones durante transiciones de fase con parámetros de orden que interactúan. Enviado a la Revista Cubana de Física para su publicación, 1985.

(12) Makhankov, V.G.

Solitones en sistemas no integrables. Phys. Report, Vol. 35, Pág. 1, 1978.

(13) Makhankov, V.G.

Solitones y experimentos nucleares. 132-134 elementos chaoticos y atómicos yadraj vol. 14, Moscú, 1983.