

Efecto polarónico en pozo cuántico utilizando el Hamiltoniano tridimensional de Fröhlich

R. Riera, F. Comas y C. Trallero-Giner
Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana

RESUMEN

Se hacen los cálculos de la energía propia del electrón debido a la interacción con fonones ópticos polares de ondas largas (LO) a la temperatura $T=0K$, en una heteroestructura semiconductor del tipo de un pozo cuántico, utilizando el Hamiltoniano de interacción electrón-fonón tridimensional de Fröhlich. El pozo es considerado de forma rectangular con barreras potenciales infinitas en las inter-fases. Se utilizó además el modelo de la masa efectiva. Los cálculos se realizaron por dos vías: utilizando la aproximación de la conservación del momento (MCA), y el cálculo exacto. Por ambos métodos se obtiene como resultado que la masa del polarón y su energía de enlace es divergente, salvo que se considere el efecto de apantallamiento de la interacción.

ABSTRACT

Self-energy due to electron-LO phonon interaction is calculated for $T=0K$ in a quantum-well-type semiconductor heterostructure. The Fröhlich hamiltonian takes account of confined electrons in an infinite-depth quantum well and non-confined LO-phonons. Calculations, in the effective-mass approximation,

are made using the momentum-conservation approximation (MCA). Also exact calculations, without using the MCA, are made. The results for polaron mass and its binding energy diverge in both cases except when the screening effect is considered.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las heteroestructuras semiconductoras ha adquirido una especial significación durante los últimos años después que el desarrollo de las técnicas de crecimiento (epitaxial por haces moleculares MBE) y de dopado (dopado modulado), brindaron la oportunidad de obtener capas semiconductoras muy delgadas con una elevada precisión en el control de sus espesores e impurezas, lo que ha permitido el surgimiento de una nueva categoría de los sistemas semiconductores: los pozos cuánticos (QW), los pozos cuánticos múltiples (MQW) y las superredes (SL), las cuales han dado lugar a un gran número de trabajos teóricos y experimentales relacionados con las propiedades de transporte [10,11], ópticos [12,13] y magnéticas.

En nuestros cálculos no se consideran los efectos de apantallamiento ni el confinamiento de los fonones ópticos (LO), tampoco se incluyen correcciones del factor de no parabolicidad de las bandas.

Se calcula la energía propia del electrón en su interacción con los fonones (LO) con el objetivo de calcular la masa y la energía de enlace del polarón, la cual puede ser expresada como sigue:

$$E_{\vec{k}N} = E_{\vec{k}N}^{(0)} (1 - \gamma') + \Delta$$

Donde $E_{\vec{k}N}$ es la energía cinética del electrón en interacción con la red, $E_{\vec{k}N}^{(0)}$ es la energía cinética del electrón en ausencia de interacción con la red, Δ es la energía de enlace y γ' es el incremento en la masa efectiva causada por la interacción del electrón con el campo de los fonones ópticos (LO).

TEORÍA GENERAL

La ecuación de masa efectiva para el electrón es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 \psi + U(z)\psi = E\psi \quad (1)$$

con las condiciones de contorno

$U(z) = 0$ para $0 < z < d$ y $U(z) = \infty$ para $d \leq z \leq 0$ donde el eje z está en la dirección del crecimiento del pozo, m_e^* es la masa efectiva del electrón y $U(z)$ el potencial.

El estado de los electrones no perturbados $|N, \vec{k}\rangle$ se describe por la función de onda $\Psi(\vec{r}, N, \vec{k})$ y la energía $E^{(0)}_{\vec{k}, N}$ dada por:

$$\Psi(\vec{r}, N, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \phi_N(z) \quad (2)$$

$$E^{(0)}_{\vec{k}, N} = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_e^*} + E_{0z} N^2 \quad (3)$$

$$\phi_N(z) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{N \cdot \pi \cdot z}{d}\right); \quad L = L_x L_y, \quad \vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

$$E_{0z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_e^* d^2}, \quad k_z = \frac{N \pi}{d}$$

siendo:

d el ancho del pozo.

L el área de las caras.

N un número entero que caracteriza la sub-banda del estado cuántico del electrón inicial.

La interacción entre el electrón y el fonón óptico (LO) se describe a través del hamiltoniano de Fröhlich \hat{K}_{int} .

$$\hat{K}_{int} = \sum_{\vec{q}} \left[c_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \hat{b}_{\vec{q}} + c_{\vec{q}}^* e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \hat{b}_{\vec{q}}^* \right] \quad (4)$$

$$c_{\vec{q}} = ie \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_{LO}}{e^* v}} \cdot \frac{1}{q} \quad \text{y} \quad \frac{1}{e^*} = \frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0}$$

Siendo:

i, la unidad imaginaria, e la carga del electrón, ϵ_0 , ϵ_∞ las constantes dieléctricas estática y de alta frecuencia, $v=Ld$ el volumen del pozo, \vec{q} el momento del fonón óptico LO, $\hbar \omega_{LO}$ su energía.

La energía del estado intermedio producto de la interacción es:

$$E_{\vec{k}, N'} = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_e^*} + E_{0z} N'^2 \pm \hbar \omega_{LO} \quad (5)$$

N' es un número entero que caracteriza la sub-banda del estado cuántico final del electrón.

$|\vec{k}, N, \vec{q}\rangle$ representa el estado combinado del electrón y el fonón:

$$|N, \vec{k}, N_{\vec{q}}\rangle = |N\rangle |\vec{k}\rangle |N_{\vec{q}}\rangle \quad (6)$$

donde $|N\rangle |\vec{k}\rangle$ corresponde a la función de onda del electrón y $|N_{\vec{q}}\rangle$ es un estado fonónico, tal que:

$$\hat{b}_{\vec{q}}^- |N_{\vec{q}}\rangle = \sqrt{N_{\vec{q}}} |N_{\vec{q}} - 1\rangle, \quad \hat{b}_{\vec{q}}^+ |N_{\vec{q}}\rangle = \sqrt{N_{\vec{q}} + 1} |N_{\vec{q}} + 1\rangle \quad (7)$$

y $\hat{b}_{\vec{q}}^+$, $\hat{b}_{\vec{q}}^-$ son los operadores de creación y aniquilación de los fonones.

Usando estas propiedades, estudiamos los elementos matriciales:

$$\begin{aligned} \langle N', \vec{k}', N_{\vec{q}} | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \hat{b}_{\vec{q}}^- | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle &= \sqrt{N_{\vec{q}}} \delta_{N', N_{\vec{q}} - 1} \langle N', \vec{k}' | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | N, \vec{k} \rangle \\ \langle N', \vec{k}', N_{\vec{q}} | e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \hat{b}_{\vec{q}}^+ | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle &= \sqrt{N_{\vec{q}} + 1} \delta_{N', N_{\vec{q}} + 1} \langle N', \vec{k}' | e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} | N, \vec{k} \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

pero

$$\langle N', \vec{k}' | e^{\pm i\vec{q} \cdot \vec{r}} | N, \vec{k} \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \phi_{N'}^*(z) e^{\pm i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi_N(z) d^2 r \quad (9)$$

En la ecuación (9) el signo menos representa la emisión de un fonón y el signo más la absorción. El elemento matricial puede ser expresado como:

$$\langle N', \vec{k}' | e^{\pm i\vec{q} \cdot \vec{r}} | N, \vec{k} \rangle = \delta_{\vec{k}', \vec{k} - \vec{q}_{\perp 0}} \int_0^d \sin \frac{N' \pi}{d} z \sin \frac{N \pi}{d} z e^{\pm i q_z z} dz \quad (10)$$

ya que $\vec{q} = (\vec{q}_{\perp}, q_z)$ y \vec{q}_{\perp} contiene los componentes de \vec{q} en el plano (x, y). Finalmente debemos obtener

$$I(\pm q_z) = \frac{2}{d} \int_0^d \sin \frac{N' \pi}{d} z \sin \frac{N \pi}{d} z e^{\pm i q_z z} dz \quad (11)$$

cuya solución se obtiene resolviendo las siguientes integrales.

$$\begin{aligned} I(\pm q_z) = -\frac{1}{2d} \left\{ \int_0^d e^{i \left(\frac{N \pi}{d} + \frac{N' \pi}{d} \pm q_z \right) z} dz - \int_0^d e^{i \left(\frac{N \pi}{d} - \frac{N' \pi}{d} \pm q_z \right) z} dz \right. \\ \left. - \int_0^d e^{i \left(\frac{N \pi}{d} - \frac{N' \pi}{d} \pm q_z \right) z} dz + \int_0^d e^{-i \left(\frac{N \pi}{d} + \frac{N' \pi}{d} \pm q_z \right) z} dz \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Estas cuatro integrales pueden resolverse exactamente o aplicando métodos aproximados.

APROXIMACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

Consiste en considerar en la dirección del eje Z, donde no existe homogeneidad del espacio, que el momento se conserva.

$$q_z = \pm \left(\frac{N'\pi}{d} \pm \frac{N\pi}{d} \right)$$

de aquí, que en la ecuación (12) las cuatro integrales puedan ser aproximadas como funciones deltas de Kronecker:

$$I(\pm q_z) = \frac{1}{2d} \left\{ \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N-N')} + \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N-N')} - \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N+N')} - \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N+N')} \right\} \quad (13)$$

Haciendo

$$\delta_1 = \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N-N')} \quad , \quad \delta_2 = \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N-N')} \\ \delta_3 = \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N+N')} \quad , \quad \delta_4 = \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N+N')}$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned} |I(\pm q_z)|^2 &= \frac{1}{4d^2} \left\{ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + 2\delta_1\delta_2 + 2\delta_3\delta_4 \right\} \\ &= \frac{1}{4d^2} \left\{ \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N-N')} + \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N-N')} + \delta_{\pm q_z, \frac{\pi}{d}(N+N')} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\pm q_z, -\frac{\pi}{d}(N+N')} + 2\delta_{N,N'} \delta_{\pm q_z, 0} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

ya que $\delta_{N,N'}$ implica $\delta_{\pm q_z, 0}$ y viceversa. Luego los elementos matriciales de las ecuaciones (9) pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \langle N', \vec{k}, N'_{\vec{q}} | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} b_{\vec{q}} | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle &= \sqrt{\frac{N'}{N}} \delta_{N', N-1} \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}_1} I(q_z) \\ \langle N', \vec{k}', N'_{\vec{q}} | e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} b_{\vec{q}}^+ | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle &= \sqrt{\frac{N'+1}{N}} \delta_{N', N+1} \delta_{\vec{k}', \vec{k}_1 - \vec{q}_1} I(-q_z) \quad (15) \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos el elemento matricial que caracteriza la interacción del electrón y el fonón.

$$\begin{aligned} \langle N', \vec{k}', N'_{\vec{q}} | \hat{k}_{int} | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle = C_{\vec{q}} \sqrt{N_{\vec{q}}} \delta_{N', N_{\vec{q}}-1} \delta_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}_{\perp}} I(q_z) + \\ + C_{\vec{q}}^* \sqrt{N_{\vec{q}}+1} \delta_{N', N_{\vec{q}}+1} \delta_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}_{\perp}} I(-q_z) \end{aligned} \quad (16)$$

El primer término en (16) corresponde a la absorción de un fonón, análogamente el segundo término corresponde a la emisión de un fonón. En ambos casos el fonón posee la energía $\hbar\omega_{\vec{q}}$.

Considerando el caso de temperatura $T=0K$, tenemos $N_{\vec{q}} = 0$. En este caso, el término de absorción se anula y obtenemos:

$$\langle N', \vec{k}', N'_{\vec{q}} | \hat{k}_{int} | N, \vec{k}, N_{\vec{q}} \rangle = C_{\vec{q}}^* \delta_{\vec{k}', \vec{k}-\vec{q}_{\perp}} I(-q_z) \quad (17)$$

La autoenergía del polarón es dada por un segundo orden de la teoría de perturbaciones a través de:

$$E_{\vec{k}, N} - E_{\vec{k}, N}^{(0)} = \langle N', \vec{k}, 0 | \hat{k}_{int} | N', \vec{k}, 0 \rangle + \sum_{N', \vec{k}, \vec{q}} \frac{|\langle N', \vec{k}', 1 | \hat{k}_{int} | N, \vec{k}, 0 \rangle|^2}{E_{\vec{k}, N}^{(0)} - E_{\vec{k}', N'}^{(0)} - \hbar\omega_{\vec{q}}} \quad (18)$$

Es obvio que

$\langle N', \vec{k}, 0 | \hat{k}_{int} | N', \vec{k}, 0 \rangle = 0$ y $E_{\vec{k}, N}^{(0)}$ es la energía del electrón en ausencia de perturbaciones fonónicas. Sustituyendo (17) en (18)

$$E_{\vec{k}, N} - E_{\vec{k}, N}^{(0)} = \sum_{N', \vec{q}} \frac{|C_{\vec{q}}^*|^2 |I(-q_z)|^2}{E_{\vec{k}, N}^{(0)} - E_{\vec{k}-\vec{q}_{\perp}, N'}^{(0)} - \hbar\omega_{\vec{q}}} \quad (19)$$

sustituyendo (3) en (19), haciendo;

$$\hbar\omega = - \left[\frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_e d^2} (N^2 - N'^2) - \hbar\omega_{10} \right] \text{ y considerando que:}$$

$|\vec{k} - \vec{q}_{\perp}|^2 = k^2 + q_{\perp}^2 - 2kq \cos \theta$, se obtiene:

$$E_{\vec{k}, N} - \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_e^*} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_e^* d^2} N^2 = \sum \frac{|C_{\vec{q}}^*|^2 |I(-q_z)|^2}{\frac{\hbar^2 k q_{\perp} \cos \theta}{m_e^*} - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2 m_e^*} - \hbar\omega} \quad (20)$$

COMO

$$C_{\vec{q}}^* = ie \sqrt{\frac{2\pi\hbar W_{10}}{\epsilon^* V}} \frac{1}{q}$$

entonces

$$|C_{q_z}^*|^2 = \frac{2\pi e \hbar W_{10}}{\epsilon^* V} \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \quad y$$

$$\sum_{\vec{q}} \longrightarrow \frac{d}{2\pi} \sum_{q_z} \frac{2}{(2\pi)^2} \int q_{\perp} dq_{\perp} d\theta$$

Hallando la suma sobre q_z

$$\sum_{\vec{q}} |I(-q_z)|^2 \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{1}{2d^2} \left\{ \frac{1}{q_1^2 + (N-N')^2 \frac{\pi^2}{d^2}} + \frac{1}{q_1^2 + (N+N')^2 \frac{\pi^2}{d^2}} + \frac{\delta NN'}{q_1^2} \right\} \quad (21)$$

sustituyendo (21) en (20) se obtiene:

$$E_{\vec{k}, N} - E_{\vec{k}, N}^{(0)} = 0 \frac{\hbar W_{10}}{\epsilon^* (2\pi)^2 2d^2} \sum_{N'} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{q_1^2 + (N-N')^2 \frac{\pi^2}{d^2}} + \frac{1}{q_1^2 + (N+N')^2 \frac{\pi^2}{d^2}} + \frac{2 \delta NN'}{q_1^2} \right] \frac{q_{\perp} dq_{\perp} d\theta}{\left[\frac{\hbar^2 k_{\perp} q_{\perp} \cos \theta}{m_e^*} - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2 m_e^*} - \hbar W \right]} \right\} \quad (22)$$

Despreciando las transiciones entre sub-bandas retenemos solamente el término $N' = N$ en (22), luego de integrar sobre el ángulo, se llega a:

$$E_{\vec{k}, N} - E_{\vec{k}, N}^{(0)} = \frac{e \hbar W_{10} m}{2\epsilon^* \pi d^2 \hbar^2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dq_{\perp}}{q_{\perp} \sqrt{\left[q_{\perp}^2 + \frac{2mW_{10}}{\hbar} - 2kq_{\perp} \right] \left[q_{\perp}^2 + \frac{2mW_{10}}{\hbar} - 2kq_{\perp} \right]} \right\} \quad (23)$$

MÉTODO EXACTO

La solución exacta de la ecuación (12) para el caso de emisión de fonones

$$I(-q_z) = \frac{1}{d} \frac{4 q_z k_z k_z'}{\left[q_z^2 - (k_z' - k_z)^2 \right] \left[(k_z + k_z')^2 - q_z^2 \right]} \times \left[1 + (-i)^{N'+N+1} \cos q_z d - i \sin q_z d \right] \quad (24)$$

de aquí que:

$$I|(-q_z)|^2 = - \frac{32 q_z^z k_z^z k_z^z}{d^2 [q_z^2 - (k_z^1 - k_z^2)^2]^2 [(k_z^2 + k_z^1)^2 - q_z^2]^2} \times$$

$$\times \left(1 + (-1)^{N^1 + N^2 + 1} \cos q_z d \right) \quad (25)$$

Sustituyendo (25) en la expresión (20) se obtiene finalmente para el cálculo exacto de la energía del polarón.

$$E_{\vec{k}, N} - E_{\vec{k}, N}^{(0)} = - \frac{8\pi^2 e \hbar \omega_{10}}{\epsilon^* d^3} \sum_{N^1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{N^1{}^2 N^2 q_z^2 [(-1)^{N^1 + N^2 + 2} \cos q_z d - 1]}{[q_z^2 - (N^1 - N^2) \frac{\pi^2}{d^2}]^2 [(N^1 + N^2) \frac{\pi^2}{d^2} - q_z^2]^2} \right] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{q_{\perp}}{q_{\perp}^2 + q_z^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\frac{\hbar^2 k_{\perp} q_{\perp} \cos \theta}{m_e^*} - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2 m_e^*} - \hbar W \right)} dq_{\perp} dq_z \quad (26)$$

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la expresión (22) la integral sobre el ángulo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{\hbar^2 k q_{\perp} \cos \theta}{m_e^*} - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2 m_e^*} - \hbar W} =$$

$$= \frac{2\pi}{\frac{\hbar^2}{2 m_e^*} \sqrt{\left(q_{\perp}^2 + \frac{2 m_e^* W}{\hbar} - 2 k q_{\perp} \right) \left(q_{\perp}^2 + \frac{2 m_e^* W}{\hbar} + 2 k q_{\perp} \right)}}$$

sin embargo al realizarse la integración en q entre 0 y ∞ se obtiene que las expresiones (22), (23) y (26) son divergentes, cuestión que había sido predicha en [34]. Esto significa que la energía y la masa del polarón en una heteroestructura semiconductor del tipo pozo cuántico (QW) no puede ser calculada utilizando el Hamiltoniano de Fröhlich tridimensional (3D), donde el cristal se considera uniforme, continuo e infinito para electrones y fonones.

Otros autores (por ejemplo Rydley [3]) eliminan la divergencia considerando que la interacción es apantallada, lo que a su vez complica los cálculos y se suele recurrir a ciertas aproximaciones como la de la conservación del momento (MCA), en la cual se pueden cometer errores desde un 10 % hasta un 60 %, como se refleja en la comparación con el experimento [4-5].

En otros trabajos sobre super-redes y pozos cuánticos [6-7] se resuelve el problema de la divergencia considerando los fonones ópticos LO en una super-red como sistema estrictamente bidimensional (2D).

Mediante esta concepción en [2] se obtuvo que la energía del polarón para un sistema (2D) es:

$$E_{KN} = E_{KN}^{(0)} - \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \left(\omega + \frac{k^2}{8m^*} \right)$$

donde α es la constante de Fröhlich es 3D y ω es la frecuencia del fonón, con esta expresión se demostró que el acoplamiento es $\frac{\pi}{2}$ veces más fuerte que en el 3D y la masa del polarón mejora según la expresión

$$m = m^* \left(1 + \frac{\pi\alpha}{8} \right), \text{ en relación con los sistemas 3D donde } m = m^* \left(1 + \frac{\alpha}{6} \right)$$

[8-9].

A pesar de que estos autores eliminan la divergencia en la energía del polarón y mejoran los cálculos teóricos todavía existen ciertas diferencias entre los resultados teóricos y experimentales, las cuales están dadas fundamentalmente en la utilización del Hamiltoniano tridimensional de Fröhlich que no considera el confinamiento de los fonones ópticos. Ello sugiere que debe utilizarse un Hamiltoniano de interacción que describa realmente las heteroestructuras semiconductoras de baja dimensionalidad, y considerando el acoplamiento del electrón con fonones LO confinados. Cálculos más realistas deberán incorporar además efectos de no parabolicidad, apantallamiento y temperaturas $T \neq 0K$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Rydley, B.K. (1982)
J. Phys: Solid State Phys, 15, 5899-5917.
2. Sawaki, N. (1986)
Surface 170, 537-541.
3. Rydley, B.K. (1982)
J. Phys: Solid State Phys, 15, 5899-5917.
4. Mason, B.A. and S. Das Sarma (1982)
Phys. Rev 1331, 437.

5. Lassin, R. and S. Das Sarma (1985)
Phys Rev. 1331, 5223.
6. Barker, S. Jr.; J.L. Merz and A.C. Gossard (1978)
Phys. Rev. 1317, 3181.
7. Sawaki, N. and I. Akasaki (1985)
Physica 13413, 494.
8. Kittel, C. (1963)
Quantum Theory of Solids (Wiley. New York).
9. Davidov, A.S. (1981)
Teoria del Sólido. (Mir. urrs).
10. Ando, T.; A. Fowler and F. Stern (1982)
Rev. Mod. Phys. 54, 437.
11. Arora, V. and A. Naeem (1985)
Phys. Rev. 1331, 3867.
12. Vojak, B.A.; W.D. Laidig; N. Holonyak, Jr. M.D. Camras; J.J. Coleman;
and P.O. Dapkus (1981)
J. Appl. Phys. 52, G21.
13. G. Bastard (1981)
Phys. Rev. B. 24, 4714.