REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. X, No. 1, 1990

Difracción del paquete de Bessel en un líquido giratorio compresible

José Marín Antuña
Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana

RESUMEN

En el presente artículo se expone de forma detallada el procedimiento de aplicación del método de Wienner-Hopf para obtener la solución teórica del problema de difracción de una onda no estacionaria tipo paquete de Bessel en una pared sumergida en un líquido giratorio y compresible. El método empleado puede ser utilizado para resolver problemas similares asociados a ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie del tipo de Wienner-Hopf.

ABSTRACT

In this paper we expose in detail the procedure of application of Wienner-Hopf method to obtain the theoretical solution of diffraction problem of a Bessel's wave packet on a wall in a gyratory compressible liquid. This method can be used to solve similar problems associated with Fredholm's integral equations of first kind of the type of Wienner-Hopf equations.

INTRODUCCIÓN

La creación de modelos que permitan ganar claridad con respecto a los comportamientos generales de los fenómenos físicos en la dinámica de la propagación y difracción de ondas no estacionarias en fluidos giratorios compresibles, viene ocupando parte de nuestra actividad en los últimos tiempos. Hemos constatado en ella la complejidad de los procedimientos matemáticos de solución de los problemas planteados; es por eso que puede resultar de interés metodológico para muchos investigadores teóricos la aplicación del método de Wienner-Hopf que aquí desarrollaremos.

En trabajos anteriores [1.2] fue demostrada la posibilidad de excitación y propagación en el interior de un líquido giratorio y compresible de una onda no estacionaria del tipo

$$u_0(x,t) = \theta(t-x_1)\ J_0\left[\alpha\sqrt{t^2-x_1^2}\right] \tag{1}$$

que denominamos paquete de Bessel. En el presente trabajo estudiaremos la difracción de dicha onda en el borde de una pared vertical semiinfinita sumergida en el líquido.

1. *PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y REDUCCIÓN A UNA ECUACIÓN DE WIENNER-HOPF*

Sea un líquido ideal compresible que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular $\alpha/2$. Referiremos el estudio de las oscilaciones pequeñas en el líquido al sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) que gira con el líquido de forma tal que el eje Ox_3 coincida con el eje de rotación del líquido. Según ha sido demostrado [1,2] en este caso la presión dinámica y las componentes del vector de velocidades de las partículas del líquido $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ para el caso de movimientos bidimensionales (no dependientes de x_2) satisfacen la ecuación

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u + \alpha^2 u\right] - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{2}$$

con $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_3^2$. Supongamos que la pared semi infinita $\Gamma = \{(x_1, x_3) \in R^2 |\ x_1 = 0, x_3 > 0\}$ se encuentra sumergida en líquido y que la onda (1) incide sobre la misma. Para investigar el proceso de difracción de esta onda en la pared Γ denotemos por

$$U(x,t) = u_0(x,t) + u(x,t) \tag{3}$$

donde $x = (x_1, x_3)$, al campo ondulatorio total, compuesto por la onda incidente (1) y el campo difractado $u(x,t)$. Por su significado físico estas funciones describen la componente v_1 del vector de velocidades de las partículas del líquido. Entonces, matemáticamente, para el campo difractado tendremos el siguiente problema:

$$
\begin{cases}
L[u] = 0 & \forall x \in R^2 \setminus \Gamma, \quad t>0 \\
\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t<0} = 0, & k=0,1,2,3 \\
\left.u\right|_{\Gamma} = -\theta(t)\, J_0(\alpha t)
\end{cases} \tag{4}
$$

Buscaremos la solución del problema (4) en la forma

$$
u(x,t) = -w_1(x,t) + \alpha \int_0^t J_1[\alpha(t-\tau)] w_1(x,\tau)\, d\tau +
$$

$$
+ 2\int_0^t d\tau \int_0^\infty \mu(s,t-\tau) W(x-y(s),\tau)\, ds \tag{5}
$$

donde

$$
w_1(x,t) = 2\int_0^\infty W(x-y(s),t)\, ds
$$

y

$$
W(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t-|x|)}{\sqrt{t^2-|x|^2}} \cos\left(\alpha \frac{x_1}{|x|} \sqrt{t^2-|x|^2}\right)
$$

es la solución singular generalizada de la ecuación (2). Aquí $y(s)=(0,s)$ y $|x|^2=x_1^2+x_3^2$. No es difícil comprobar que la función (5) satisface la ecuación y las condiciones iniciales para cualquier función $\mu(s,t)$ que debe ser determinada de la condición de frontera del problema (4). Con la ayuda de dicha condición, para $\mu(s,t)$ se obtiene la siguiente ecuación integral:

$$
\frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \mu(s,t-\tau) \frac{\theta(\tau-|x_3-s|)}{\sqrt{\tau^2-|x_3-s|^2}}\, ds = -\theta(t)\, J_0(\alpha t) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(t-|x_3-s|)}{\sqrt{t^2-|x_3-s|^2}}\, ds -
$$

$$
- \frac{\alpha}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty J_1(\alpha(t-\tau)) \frac{\theta(\tau-|x_3-s|)}{\sqrt{\tau^2-|x_3-s|^2}}\, ds, \quad x_3 \geq 0 \tag{6}
$$

Supondremos que la función incógnita $\mu(s,t)$ y su transformada de Laplace $M(s,p)$ satisfacen en el entorno del punto $s=0$ (borde de la pared Γ) las valoraciones siguientes

$$
|\mu(s,t)| \leq \frac{C(t)}{\sqrt{s}} \quad \forall t>0, \qquad |M(s,p)| \leq \frac{C(p)}{\sqrt{s}} \quad \forall \operatorname{Re} p>0 \tag{7}
$$

Para resolver la ecuación (6) apliquemos la transformada de Laplace respecto a la variable t. Obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty M(s,p)K_0(p|x_3-s|)\,ds = \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_0(p|x_3-s|)\,ds -$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}{\alpha\sqrt{p^2+\alpha^2}} K_0(p|x_3-s|)\,ds$$

ya que [3]

$$\frac{\theta(t-|x|)}{\sqrt{t^2-|x|^2}} \doteqdot K_0(p|x|), \quad J_n(\alpha t) \doteqdot \frac{(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n}{\alpha^n\sqrt{p^2+\alpha^2}}$$

De aquí se deduce la expresión

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \bar{M}(s,p)\;K_0(p|x_3-s|)\,ds = -\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} \quad \forall x_3\geq 0,\ \mathrm{Re}\ p>0 \tag{8}$$

donde

$$\bar{M}(s,p) = M(s,p) - \frac{p}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} \tag{9}$$

La ecuación (8) para Re $p>0$ es una ecuación integral de Wienner-Hopf de primera especie en el semieje $x_3\geq 0$.

2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE WIENNER-HOPF

Pasemos a resolver la ecuación (8) con la ayuda de los métodos conocidos [4,5,6]. Con este fin consideremos la ecuación

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \bar{M}(s,p)\;K_0(p|x_3-s|)\,ds = f_+(x_3) + f_-(x_3) \tag{10}$$

donde

$$f_+(x_3) = \begin{cases} e^{-\varepsilon x_3} & \forall x_3>0 \\ 0 & \forall x_3<0 \end{cases}, \quad f_-(x_3) = \begin{cases} 0 & \forall x_3>0 \\ e_-(x_3) & \forall x_3<0 \end{cases}$$

y $e_-(x_3)$ es cierta función acotada: $|e_-(x_3)|<B$. Apliquemos a la ecuación (10) la transformada de Fourier. Como resultado obtenemos:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\,\bar{M}_+^{(F)}(k,p)\;K_0^{(F)}(k) = F_+(k) + E_-(k) \tag{11}$$

donde $\bar{M}_+^{(F)}(k,p)$ es la transformada unilateral de Fourier de $\bar{M}(s,p)$ y $E_-(k)$ es la transformada unilateral de Fourier de $e_-(x_3)$. Además

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x_3} e^{ikx_3} dx_3 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k+i\varepsilon},$$

y

$$K_0^{(F)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(p|x|) e^{ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{p^2+k^2}}.$$

Por consiguiente, (11) queda en la forma

$$\frac{\bar{M}_+^{(F)}(k,p)}{\sqrt{k^2+p^2}} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k+i\varepsilon} + E_-(k) \tag{12}$$

Apliquemos el método de factorización. De (12) tenemos que

$$\frac{\bar{M}_+^{(F)}(k,p)}{\sqrt{k+ip}} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k-ip}}{k+i\varepsilon} + \sqrt{k-ip}\, E_-(k) \tag{13}$$

o, en virtud de que

$$\frac{\sqrt{k-ip}}{k+i\varepsilon} \equiv \frac{\sqrt{-i\varepsilon-ip}}{k+i\varepsilon} + \frac{\sqrt{k-ip} - \sqrt{-i\varepsilon-ip}}{k+i\varepsilon}$$

de (13) obtenemos

$$\frac{\bar{M}_+^{(F)}(k,p)}{\sqrt{k+ip}} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{-i\varepsilon-ip}}{k+i\varepsilon} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k-ip} - \sqrt{-i\varepsilon-ip}}{k+i\varepsilon} + \sqrt{k-ip}\, E_-(k) \tag{14}$$

Llamemos Π_+ al conjunto de funciones analíticas univaluadas en el semiplano $\mathrm{Im}\, k > -\mathrm{Re}\, p$ y Π_- al conjunto de funciones analíticas univaluadas en el semiplano $\mathrm{Im}\, k < \mathrm{Re}\, p$. Entonces se ve que la parte izquierda de la ecuación (14) pertenece a Π_+ ya que tiene un punto de ramificación en $k = (\mathrm{Im}\, p, -\mathrm{Re}\, p)$. La parte derecha de (14) pertenece a Π_- ya que tiene un punto de ramificación en $k = (-\mathrm{Im}\, p, \mathrm{Re}\, p)$ y en el punto $k = -i\varepsilon$ tiene una singularidad evitable. Además, ambas partes tienden a cero para $|k| \longrightarrow \infty$ como $|k|^{-1}$ en virtud de (7) y de la acotación de la función $e_-(x_3)$. Por consiguiente, de acuerdo con el esquema general del método de Wienner-Hopf existe una función entera única $P(k)$ igual a ambas partes en la franja $-\mathrm{Re}\, p < \mathrm{Im}\, k < \mathrm{Re}\, p$ y tal que

$$\frac{\bar{M}_+^{(F)}(k,p)}{\sqrt{k+ip}} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{-i\varepsilon-ip}}{k+i\varepsilon} = P(k) \equiv 0 \tag{15}$$

La igualdad de (15) se deduce de la tendencia a cero de la función para $|k| \longrightarrow \infty$ y del teorema de Liouville. Por tanto:

$$\bar{M}_{+}^{(F)}(k,p) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\varepsilon + p} \; \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} \tag{16}$$

De esta manera, la transformada inversa de Fourier dará:

$$\bar{M}(s,p) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\varepsilon + p} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk \tag{17}$$

Con ayuda de los métodos de las integrales de contorno en el plano complejo se obtiene

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks}, -i\varepsilon\right] -$$

$$- \left\{ \int_{L_1} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk + \int_{L_2} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk \right\},$$

donde los contornos L_1 y L_2 se toman por los bordes del corte hecho desde el punto (Im p, -Re p) paralelamente al eje imaginario en el semiplano inferior hasta el infinito.

Además

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks}, -i\varepsilon\right] = \sqrt{-i\varepsilon + ip}\, e^{-\varepsilon s} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{p}$$

Para la integral por L_1, haciendo $w = k + ip$ y luego $w = re^{-i\frac{\pi}{2}}$, tenemos:

$$\int_{L_1} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk = e^{-ps} \int_{-i\infty}^{0} \frac{\sqrt{w}\, e^{-iws}}{w - ip + i\varepsilon} dw =$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-ps} \int_{\infty}^{0} \frac{\sqrt{r}\, e^{-rs} dr}{r + p - \varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-ps} \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{-rs} dr}{r + p} .$$

De forma similar para la integral por L_2, se obtiene

$$\int_{L_2} \frac{\sqrt{k + ip}}{k + i\varepsilon} e^{-iks} dk \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{-ps} \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{-rs} dr}{r + p} .$$

Así pues de (17) para $\varepsilon \longrightarrow 0$ obtenemos:

$$\bar{M}(s,p) = p + \frac{\sqrt{p}}{\pi} e^{-ps} \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{-rs} dr}{r + p} \tag{18}$$

La integral en (18) puede calcularse haciendo $r=x^2$. Entonces

$$I_1 \equiv \int_0^\infty \frac{\sqrt{r}\, e^{-rs}\, dr}{r + p} = 2 \int_0^\infty \frac{x^2}{x^2 + p} e^{-x^2 s} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2pI_2$$

donde

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2 s} dx}{x^2 + p} \equiv e^{ps} \int_0^\infty \frac{e^{-s(x^2 + p)}}{x^2 + p} dx \equiv e^{ps} I_3.$$

Calculemos I_3. De la relación

$$\frac{dI_3}{ds} = - \int_0^\infty e^{-s(x^2 + p)} dx = - \frac{e^{-ps}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

se deduce fácilmente que

$$I_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{p}} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{ps}\right)$$

donde

$$\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \Phi(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

es la función de error complementaria. Como resultado de (18) obtenemos:

$$\bar{M}(s,p) = p \left[\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} + \Phi\left(\sqrt{ps}\right)\right] \tag{19}$$

La expresión (19) es la solución de la ecuación de Wienner-Hopf (10) para $\varepsilon \longrightarrow 0$, es decir, de la ecuación (8) cuando la parte derecha es la unidad. Por lo tanto, multiplicando por $-1/\sqrt{p^2+\alpha^2}$, obtenemos la solución de la ecuación (8) en la forma

$$\bar{M}(s,p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} \left[\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} + \Phi\left(\sqrt{ps}\right)\right] \tag{20}$$

con lo que concluye la solución de la ecuación de Wienner-Hopf.

3. *SOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y SU INVESTIGACIÓN*

De acuerdo con la fórmula (9), la transformada de Laplace $M(s,p)$ de la función buscada $\mu(s,t)$ tiene la forma

$$M(s,p) = - \frac{p}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} \left[\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi ps}} - \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{ps}\right)\right]. \tag{21}$$

Teniendo en cuenta [3] las conocidas transformadas de Laplace:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} \equiv 1 - \alpha\,\frac{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}{\alpha\sqrt{p^2+\alpha^2}} = 1 - \alpha\,\mathscr{L}\left\{J_1(\alpha t)\right\}; \quad \mathscr{L}\left\{J_1(\alpha t)\right\} \doteq J_1(\alpha t),$$

$$\frac{e^{-ps}}{\sqrt{\pi p s}} \doteq \frac{1}{\pi}\,\frac{\theta(t-s)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t-s}}, \quad \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{ps}\right) \doteq \frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{s}}{t}\,\frac{\theta(t-s)}{\sqrt{t-s}},$$

tenemos, finalmente:

$$\mu(s,t) = \eta(s,t) - \alpha J_1(\alpha t) * \eta(s,t) \tag{22}$$

donde

$$\eta(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\theta(t-s)}{t\sqrt{s}}\,\sqrt{t-s} \tag{23}$$

y $*$ representa la convolución en el tiempo de las funciones. Colocando (22) en (5) se obtiene la solución analítica del problema (4). El campo ondulatorio completo tendrá la forma (3), donde u_0 viene dada por (1).

Valoremos el resultado obtenido. No es difícil ver que la función $w_1(x,t) = 0$ para $|x_1|>t$. Además, ella también es igual a cero para $|x_1|<t$ si $x_3<0$ y $x_1^2+x_3^2>t^2$. Por otra parte, la integral que contiene a $\mu(s,t)$ en la fórmula (5) es distinta de cero sólo dentro del círculo $x_1^2+x_3^2<t^2$. Esta integral da el aporte fundamental al campo difractado concentrado en dicho círculo, como resultado de la difracción de la onda en el borde de la pared Γ. Por último, no es difícil comprobar que para $0<x_1<t$ y $x_3>0$ se cumple que

$$w_1(x,t) - \alpha\int_0^t J_1(\alpha(t-\tau))\,w_1(x,\tau)\,d\tau = \theta(t-x_1)\,J_0\left(\alpha\sqrt{t^2-x_1^2}\right)$$

y para $-t<x_1<0$ y $x_3>0$

$$w_1(x,t) - \alpha\int_0^t J_1(\alpha(t-\tau))\,w_1(x,\tau)\,d\tau = \theta(t+x_1)\,J_0\left(\alpha\sqrt{t^2-x_1^2}\right)$$

Lo dicho nos permite afirmar que el cuadro de difracción del paquete de Bessel es el siguiente. Toda la región de análisis $R^2\backslash\Gamma$ puede ser dividida en el instante $t>0$ en las regiones que a continuación se describen:

REGIÓN I: Para $x_3>0$: $\{x_1<-t\}$; para $x_3<0$: $\{x_1<t\}\cap\{x_1^2+x_3^2>t^2\}$.

En esta región sólo está presente la onda incidente $u_0(x,t)$.

REGIÓN II: $\{x_3>0\}\cap\{-t<x_1<0\}\cap\{x_1^2+x_3^2>t^2\}$

Aquí el campo total tiene la forma de la superposición de la onda incidente y la reflejada en la pared Γ.

REGIÓN III: $x_1^2+x_3^2<t^2$

En el interior de este círculo tiene lugar el proceso de difracción de la onda incidente en el borde de la pared Γ.

REGIÓN IV: El resto de R^2. Aquí el campo total es cero. La parte correspondiente a $x_3>0$ constituye la "sombra" provocada por la pared Γ al incidir sobre ella el paquete de Bessel y para $x_3<0$ tenemos el frente de dicho paquete, dado por la ecuación $x_1=t$.

Como puede apreciarse, el cuadro ondulatorio así descrito y que surge como resultado de la difracción es cualitativamente el mismo que aparece, por ejemplo, en la difracción de ondas acústicas descritas por la ecuación clásica de onda.

En un trabajo futuro abordaremos una solución más detallada del fenómeno estudiado en el presente artículo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Marín Antuña, J. (1985)
   Sobre la excitación de ondas en un líquido giratorio y compresible. Revista de Ciencias Matemáticas, Vol. VI, No. 1, 105-114.
2. Gabov, S.A. y J. Marín Antuña (1985)
   Ecuación de ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible y problemas de difracción. Zhurnal vichis. matem. y matem. fisiki, tom 25, No. 6, 873-882.
3. Bateman, H. y A.Erdélyi (1969)
   Tablas de transformadas integrales. Serie SMB, T-1,M; Nauka.
4. Wienner, N. y R. Peli (1964).
   Transformada de Fourier en el campo complejo. Moscú, Nauka.
5. Gajov, F.D. y Yu.I. Cherskv (1978)
   Ecuaciones tipo convolución. Moscú, Nauka.
6. Noble, V. (1962)
   El método de Wienner-Hopf. Moscú, Inost. Literatura.

Recibido: 6 de febrero de 1989