Acerca de las soluciones clásicas del SU (2) Yang-Mills Euclideano

Jorge A. González y Reynaldo Mola H.
Departamento de Física, Universidad de Camagüey, Cuba

RESUMEN

Para el SU(2) Yang-Mills Euclideano descrito en el formalismo de t'Hooft se encuentra un análogo entre las ecuaciones de los campos de calibración y la ecuación de la teoría $\lambda\varphi^4$. Se muestra que las únicas soluciones existentes en el espacio Euclideano que contienen acción finita corresponden a soluciones instantónicas con cargas topológicas uno y cero.

ABSTRACT

An analogous between the theory $\lambda\varphi^4$ and the SU(2) Euclidean gauge theory described in t' Hooft's formalism is found. It is shown that the unique solutions existing in the Euclidean space which contain finite action belong to instanton-solutions with topological charges one and zero.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las teorías de calibración es de gran interés para la descripción de las interacciones de los quarkos y leptones y juegan un papel fundamental en la teoría cuántica del campo.

Estas teorías han sido estudiadas desde varios puntos de vista. En particular el análisis de las soluciones de las ecuaciones clásicas del movimiento juegan un rol importante en los estudios no perturbativos como por ejemplo: en la construcción del vacío de la cromodinámica cuántica, en el estudio del confinamiento quárkico, cuantificación no-lineal y otros.

Desde la aparición de las soluciones instantónicas de Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin y t' Hooft en 1975 (BPST-instanton) [1,2] de las ecuaciones clásicas del movimiento de los campos no-abelianos se lleva a cabo una serie de importantes investigaciones de las mismas debido fundamentalmente a las propiedades de acción mínima finita que estas presentan, lo cual es decisivo para la cuantificación por los métodos de la teoría cuasi-clásica (ver por ejemplo [3,4]). Producto de esto en los últimos años se han realizado estudios con el objetivo de encontrar nuevas soluciones de las ecuaciones euclideanas del Yang-Mills [5-7] con mínima acción que puedan brindar algún aporte a las anteriores cuestiones. En estos trabajos [5,7] se encontraron soluciones elípticas a la ecuación de autodualidad o antiautodualidad, las cuales generalizan a las de tipo BPST y además presentan singularidad para valores arbitrarios de las funciones elípticas de Jacobi. No obstante eso en el trabajo [6] se muestra que la aparición de un instantón singular de tipo BPST puede ser obtenido en la teoría de perturbación.

En el presente trabajo se hacen estudios de las posibles soluciones de la ecuación de Yang-Mills en el espacio de Euclides utilizando el ansatz de t'Hooft para el grupo SU(2), lo cual posibilita representar la compleja ecuación en una forma escalar más sencilla. Las únicas soluciones localizadas de la ecuación de Yang-Mills que tienen acción finita corresponden a valores nulos del tensor energía-impulso y satisfacen a las ecuaciones de autodualidad con diferentes cargas topológicas.

2. FORMULACIÓN EUCLIDIANA DEL YANG-MILLS Y ANSATZ DE t'HOOFT

Un sistema de campos de Yang-Mills se describe por la acción

$$S = -\frac{1}{2g}\int d^4x \, \mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad (1)$$

donde: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$ estensor intensidad del campo de calibración, representados en forma de matrices Ermitianas de una representación adjunta del álgebra de Lee del grupo de Lee G.

Los estremales de la acción (I) satisfacen a las ecuaciones de Yang-Mills

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} + i[F_{\mu\nu}, A_\nu] = 0, \qquad (2)$$

las cuales al igual que la acción (I) son invariantes con respecto a las transformaciones de calibración de los potenciales

$$A'_\mu = g^+ A_\mu g - ig^+\partial_\mu g \;, \qquad (3)$$

donde g son matrices realizadoras de la representación unitaria del grupo compacto de calibración G.

En el espacio real de Minkovsky existen muchas soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills (2). En particular fue mostrado [8] que al igual que en la electrodinámica en el caso de los campos noabelianos existen soluciones de tipo de ondas planas. Estas, con densidad energética finita, poseen una energía indeterminada.

En el espacio de Euclides sin embargo la teoría cambia. Este último no es más que el de Minkovsky tomado con tiempo imaginario, o sea, haciendo el cambio

$$x_0 \to -ix_4 \tag{4}$$

pudiéramos obtener la representación euclideana de todas las magnitudes físicas.

En el espacio de Euclides es evidente que la suma de cuadrados

$$\mathrm{Tr}[(F_{\mu\nu}-\tilde{F}_{\mu\nu})(F_{\mu\nu}-\tilde{F}_{\mu\nu})] \geq 0, \tag{5}$$

donde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ es tensor dual con relación a $F_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ es un tensor completamente antisimétrico.

De (5) sale que

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \geq 2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}), \tag{6}$$

de donde por la relación

$$\mathrm{Tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \tag{7}$$

obtenemos que

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \geq \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}), \tag{8}$$

quien establece luego de la integración el valor mínimo de la acción euclideana del Yang-Mills. Esta se establece cuando

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,F_{\alpha\beta} \tag{9}$$

Las ecuaciones (9) son llamadas ecuaciones de autodualidad y como es evidente forman un sistema de ecuaciones menos complejo que (2). Las ecuaciones de antiautodualidad también responden a valores mínimos de la acción.

Para pasar de la teoría del campo en el espacio de Minkovsky a la teoría del campo en el espacio con métrica euclideana es necesario realizar el llamado virage de Bik en el plano complejo de la variable x_0 y P_0.

$$x_0 \to -ix_4 \ , \ P_0 \to iP_4,$$

$$x^2 = x_0^2 - x^2 \to -x_E^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$

Las resoluciones instantónicas halladas en el trabajo [I] de la ecuación de autodualidad (9) se presentan en forma de deformación conforme del fono de calibración del vacío

$$A_\mu = \tau_a A_\mu^a \quad , \qquad A_\mu = if(x^2)g^+(x)\partial_\mu g(x) \tag{16}$$

Utilizando el formalismo (14) podemos escribir a (16) en forma: (ver apéndice)

$$A_\mu^a(x) = \frac{2\ f(x)}{x^2}\,\eta_{a\mu\nu}\, x^\nu \ , \tag{17}$$

$\eta_{a\mu\nu}$ son símbolos de t'Hooft los cuales contienen un índice de grupo latino a, dos griegos del espacio-tiempo ν, μ y se determinan de la siguiente forma:

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu}, & \mu,\nu = 1,2,3. \\ -\delta_{a\nu}, & \mu = 0 \\ \delta_{a\mu}, & \nu = 0 \\ 0 \ , & \mu,\nu = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Todo lo referente a estos símbolos ver en el apéndice.

Definiendo al tensor del campo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \ , \tag{19}$$

y utilizando (17), obtenemos que:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{-4}{x^2}\, f(1-f)\eta_{a\mu\nu} + \frac{4}{x^4}\,[f(1-f)-x^2 f'](\eta_{a\mu\alpha}x^\alpha x^\nu - \eta_{a\nu\alpha}x^\alpha x^\mu) . \tag{20}$$

La condición de autodualidad (9) exige que

$$f(1-f) - x^2 f' = 0 \ , \ f' \equiv df/d(x^2), \tag{21}$$

la cual tiene como solución el instantón de tipo BPST [I]

$$f(x^2) = x^2/x^2 + \lambda^2, \tag{22}$$

donde λ es constante de integración llamada dimensión del instantón.

3. ECUACIÓN DE YANG-MILLS

Hagamos ahora un estudio más detallado de las ecuaciones (2) en el formalismo antes explicado.

Teniendo en cuenta a (20) y (17) y haciendo algunas operaciones algebraicas utilizando las propiedades dadas en el apéndice, podemos llevar la ecuación (2) a la forma

$$x^4 f'' + x^2 f' - f + 3f^2 - 2f^3 = 0, \tag{23}$$

la cual representa a (2) mediante el campo escalar.

Notemos que las soluciones de (21) satisfacen a (23). Esto es consecuencia de que cualquier tensor autodual dado por la definición (9) satisface a la ecuación del campo (2).

Haciendo en (23) el cambio de variables

$$\rho = \ln x^2/\lambda^2 \quad , \quad f = \frac{1}{2} + g \, , \tag{24}$$

donde λ es constante arbitraria dimensional de integración, obtenemos la ecuación

$$g'' + \frac{1}{2} g - 2g^3 = 0 \tag{25}$$

Esta expresión recuerda a la ecuación unidimensional de la teoría λg^4 que contiene como integral de movimiento a:

$$\frac{1}{2} g'^2 + \frac{g^2}{4} - \frac{g^4}{2} = \text{const} = A \, , \tag{26}$$

y puede describir a una partícula que se encuentra en un potencial

$$-V(g) = \frac{1}{2} \left(g^2 - \frac{1}{4}\right)^2 , \tag{27}$$

por lo que (26) adquiere la forma

$$\frac{1}{2} g'^2 - V(g) = E \tag{28}$$

Definiendo $g' = h$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} h' = g \\ \\ g' = -\dfrac{1}{2} g + 2g^3, \end{cases} \tag{29}$$

el cual posee dos puntos de ensilladura y un centro. (Ver [9, 10]). El retrato de fase de este sistema (Figura 1) indica que las trayectorias que están fuera de la separatriz corresponden a soluciones no-localizadas que tienden al infinito. Las únicas soluciones localizadas del sistema corresponden a la separatriz que une a los puntos de ensilladura y estas describen procesos de tunelización entre dos estados de vacío $g = -\frac{1}{2}$, $g = \frac{1}{2}$. Evidentemente el instantón que a esto corresponde en la teoría euclideana de campos de calibración de Yang-Mills, que por (16) o

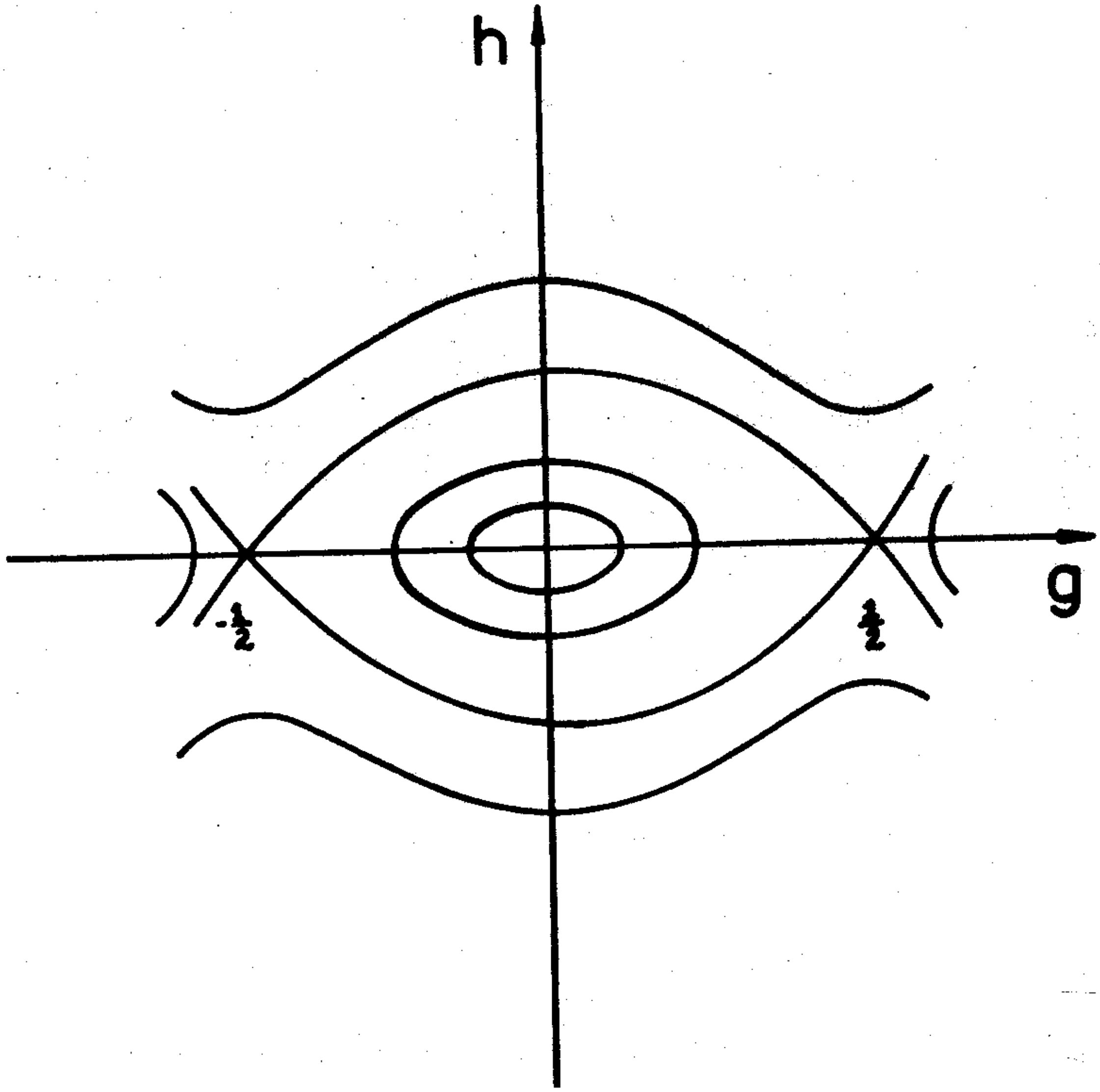

Figura 1. Retrato de fase del sistema (29).

(17) tiene carga topológica igual a uno describe el efecto túnel entre dos estados de vacío $f = 0(x^2 \to -\infty)$, $f = 1(x^2 \to \infty)$ con diferentes cargas topológicas:

Estas últimas soluciones aparecen en (28) cuando $E = 0$.

$$\frac{dg}{\sqrt{2(V + E)}} = \rho - \rho_0 = \pm \frac{dg}{g^2 - \frac{1}{4}}, \qquad (30)$$

que tiene como solución a

$$\rho - \rho_0 = \pm \ln \frac{1+2g}{1-2g}, \quad g = \pm \operatorname{th} \frac{1}{2}(\rho - \rho_0) \qquad (31)$$

Las soluciones (31) son de tipo KINK en la teoría $\lambda\varphi^4$ y teniendo en cuenta a (24) obtenemos que

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{x^2-\lambda^2}{x^2+\lambda^2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{x^2+\lambda^2}\,, \tag{32}$$

$$f = -\frac{1}{2}\,\frac{x^2-\lambda^2}{x^2+\lambda^2} + \frac{1}{2} = \frac{\lambda^2}{x^2+\lambda^2}\,, \tag{33}$$

los cuales son instantones con cargas topológicas iguales a uno y cero respectivamente.

Otras expresiones analíticas pueden ser obtenidas desde (30) y las mismas pueden ser expresadas en forma general a través de funciones elípticas que aunque con densidad de energía finita oscilan o tienen una mala conducta cuando $x^2 \to \pm\infty$ y la acción se indetermina. Un ejemplo de ello es el caso $A = 0$ donde la solución de g es dada por:

$$\int \frac{dg}{g\sqrt{g^2 - 1/2}} = \rho - \rho_0\,, \tag{34}$$

quien acepta como solución a

$$\rho - \rho_0 = \pm\sqrt{2}\ \mathrm{Arcsec}\,\sqrt{2}\,g\;, \tag{35}$$

por lo que

$$g(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\cos\,\ln(x^2/\lambda^2)^{\sqrt{2}}} \tag{36}$$

Para pequeñas amplitudes se tienen soluciones periódicas cuyas expresiones aproximadas son:

$$f = \frac{1}{2} + \gamma\,\sin(\ln x^2/\bar{\lambda}^2)\,,$$

donde $\gamma \ll 1$ es constante arbitraria.

4. CONCLUSIONES

Utilizando el formalismo de t'Hooft para el grupo SU(2) se plantean las ecuaciones de Yang-Mills de los campos de calibración dados mediante un campo conforme-escalar.

El uso de estos mecanismos nos permitió realizar un estudio detallado del SU(2) Yang-Mills euclideano debido a que es posible obtener un análogo entre esta teoría y la teoría del campo $\lambda\varphi^4$ quien además de ser menos compleja está más estudiada.

Haciendo un análisis del retrato de fase obtenido para un sistema de tipo Yang-Mills y estudiando sus posibles soluciones, obtenemos que las únicas localizadas que conllevan a una acción finita corresponden a las unoinstantónicas de tipo BPST [I] y a las ceroinstantónicas, o sea, soluciones con topología trivial. Otras soluciones del Yang-Mills euclideano no contienen acción finita en este formalismo.

5. APÉNDICE

Las matrices g(x) parametrizadas de tal forma que cuando $x^2 \to \infty$ ellas correspondan a una proyección esfera-esfera, donde una de estas es el espacio de parámetros del grupo de calibración SU(2) y otra es el espacio tiempo euclideano cuatridimensional, es cómodo representarlas de forma

$$g(x) = i\tau_\mu^+ x_\mu / \sqrt{x^2}, \quad g^+(x) = -i\tau_\mu^- x_\mu / \sqrt{x^2}$$

$$x^2 = x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \tau_\mu^{\pm} = (\mp i, \vec{\tau})$$

La multiplicación $\tau_\mu^+ \tau_\nu^-$ se puede escribir en forma

$$\tau_\mu^+ \tau_\nu^- = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{a\mu\nu}\tau_a \,, \quad \tau_\mu^- \tau_\nu^+ = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{a\mu\nu}\tau_a$$

donde los símbolos de t'Hooft $\eta_{a\mu\nu}$ se determinan por (18) y los símbolos $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$ se diferencian solamente por los signos ante los símbolos de Kroneker $\delta_{a\mu}$ en esa definición.

$\eta_{a\mu\nu}$ satisface la condición de autodualidad

$$\eta_{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \eta_{a\alpha\beta}$$

y las siguientes importantes propiedades.

$$\eta_{a\mu\nu} = -\eta_{a\nu\mu}, \quad \eta_{a\mu\nu}\eta_{b\mu\nu} = 4\,\delta_{ab},$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta},$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{a\gamma\beta} = \delta_{\mu\gamma}\eta_{a\nu\alpha} - \delta_{\nu\gamma}\eta_{a\mu\alpha} + \delta_{\alpha\gamma}\eta_{a\mu\nu},$$

$$\eta_{a\mu\alpha}\eta_{b\mu\beta} = \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{abc}\eta_{c\alpha\beta},$$

$$\epsilon_{abc}\eta_{b\mu\nu}\eta_{c\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu}\eta_{a\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\eta_{a\nu\alpha} - \delta_{\nu\alpha}\eta_{a\mu\beta} + \delta_{\nu\beta}\eta_{a\mu\alpha},$$

$$\eta_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\mu\nu} = 0 \quad , \quad \eta_{a\gamma\mu}\bar{\eta}_{b\gamma\nu} = \eta_{a\gamma\mu}\bar{\eta}_{b\gamma\mu}$$

donde $\epsilon_{abc}, \epsilon_{\alpha\mu\beta\gamma}$ son los tensores completamente antisimétricos de Levi-Chivita. El paso a las relaciones que contengan a $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$ se realiza cambiando a $\eta_{a\mu\nu}$ por $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ por $-\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen al C.Dr. Alejandro Cabo y al Dr. Hugo Pérez por su estimulación en la formulación de este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Belavin, A.A.; A.M. Polyakov; A.S. Schartz y Yu. S. Tyupkin
   Pseudoparticle solution of the Yang-Mills equations. Phys. Lett. 1975. v. 59, N. I, p. 85-87.

2. t'Hooft, G.
   Symmetry breaking throgh Bell-Jaskiw anomalies. Phys. Rev. Lett. 1976, v. 37, N. 1, p. 8-11.

3. Vainstein, A.I.; V.I. Sajarov; V.A. Novikov y M.A. Shifman
   Instantonnaya asbuka. Uspeji fisicheskij nauk. 1982. T.136, vip. 4, p. 553-591. (en ruso).

4. Jaskiw, R.
   Quantum meaning of classical field theories. Rev. Mod. Phys. 1977, v. 49, N. 3, p. 681-706.

5. Callan, C.; R. Dashen
   A theory of Hadronic structure. Phys. Rev. D. 1978, v. 17, p. 2717.

6. Mola, R. y V.M. Pyzh
   Instantony v classicheskoi tori vozmuchenii. Problemi Yadernoi Fisiki y cosmicheskij luchei. 1986, T. 26, p. 26-32 (en ruso).

7. Arai, Y.
   New elliptic solutions of the Euclidian SU(2) gauge theory. Phys. Rev. D, v. 34, N. 6, p. 1884-1887.

8. Coleman, S.
   Non-Abelian planes waves. Phys. Lett. 1977, v. 70 B N.I., p. 59-60.

9. Makhankov, V.G.
   Phys. Rep. Vol. 35, (1978), I.

10. González, J.A. y J.A. Holyst
    Solitary waves in one-dimensional damped systems. Phys. Rev. B. Vol. 35, N. 3, 1987, p. 1165.