REVISTA CUBANA DE FISICA Vol. XI, No. 1, 1991

Sobre una ecuación para oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso y compresible

José Marín Antuña y Oscar Sotolongo Costa
Departamento de Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de La Habana

RESUMEN

Los autores obtienen una ecuación diferencial en derivadas parciales de tercer orden no clásica para describir las oscilaciones pequeñas de la presión y la densidad en un fluído viscoso y compresible, que se reduce a la conocida ecuación de las ondas acústicas en fluídos ideales para el caso en que los parámetros de viscosidad tienden a cero. Analizan, además, las relaciones de dispersión para dicha ecuación y obtienen una expresión general que se reduce, como caso particular de viscosidad pequeña, a un resultado reportado por Landau y obtenido de forma diferente. Para altas frecuencias y viscosidades grandes se obtiene, como caso particular, un resultado reportado por Brejovskij y Goncharov.

ABSTRACT

The authors obtain a partial differential equation of third order to describe the small oscillations of pressure and density in a viscous and compressible fluid, which reduces to the well known equation of the acoustic waves in ideal fluids when the parameters of viscosity become zero. They, moreover, analize the dispersion relations for this equation and obtain a

general expression, which reduces, in the particular case of small viscosity, to a result reported by Landau and obtained by other way. In the particular case of high frecuency and high viscosity they obtain a result reported by Brekhovskij and Goncharov.

INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos ha crecido el interés por el estudio de las propiedades dinámicas y de los procesos físicos en fluídos viscosos compresibles. Este interés viene dado por las diversas aplicaciones de las investigaciones a los procesos relacionados con el uso de combustibles [1] y lubricantes [2], así como la necesidad de estudios más profundos de los procesos reales en océanos y en la atmósfera [3]. Igualmente, son de interés las posibles aplicaciones en la medicina. Se ha realizado un conjunto grande de trabajos teóricos y prácticos sobre los problemas del movimiento y la excitación de ondas en fluídos ideales y viscosos [4-12] y en la presente publicación presentamos una ecuación diferencial de tercer orden en derivadas parciales que permite describir las oscilaciones pequeñas en un fluído viscoso y compresible y hacemos algunas consideraciones al respecto.

1. *ECUACIÓN FUNDAMENTAL*

Consideremos un fluído viscoso y compresible. Referiremos el análisis de las oscilaciones pequeñas en dicho fluído a un sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3). El sistema de ecuaciones hidronámicas que describe los movimientos del fluído está compuesto por:

- La ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v + \frac{1}{\rho}(\xi + \frac{\eta}{3})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{v}) + \vec{f} \qquad (1)$$

donde $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es la velocidad de las partículas del fluído, p su presión, ρ su densidad, η el coeficiente de viscosidad newtoniana, ξ la segunda viscosidad y $\vec{f}$ las fuerzas externas por unidad de masa. Consideramos un fluído tal que η y ξ son constantes.

- La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (2)$$

- La ecuación de estado

$$p = p(\rho, S) \qquad (3)$$

donde S denota la entropía de la partícula de fluído.

Consideremos que la naturaleza de los procesos que estudiamos es tal que estos puedan considerarse isoentrópicos; entonces, denotando por [13]

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \qquad (4)$$

cuyo sentido físico es el cuadrado de la velocidad del sonido en el fluído y que consideramos una función dada de p y ρ, la ecuación (2) adopta la forma

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{dp}{dt} + \rho\vec{\nabla}\circ\vec{v} = 0 \qquad (5)$$

Consideremos ahora que las perturbaciones en el fluído con respecto a una posición de equilibrio son pequeñas. Ello significa que si, por ejemplo, v_0 es la amplitud de la velocidad, ω la frecuencia y k el número de la onda:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\ \alpha\ \omega v_0 \quad , \quad (\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v}\ \alpha\ kv_0^2$$

La relación de estas magnitudes es

$$\varepsilon = \frac{(\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v}}{\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}} = \frac{kv_0^2}{\omega v_0} = \frac{v_0}{c_f} \qquad (6)$$

donde c_f es la velocidad de fase. ε es un parámetro de linealidad y exigiremos que $\varepsilon << 1$, lo que equivale a que la velocidad de las partículas del fluído en la onda sea mucho menor que la velocidad de fase de la onda. Bajo esta suposición podemos despreciar el término no lineal $(\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v}$ en la ecuación de Navier-Stokes y como resultado -no considerando la acción de fuerzas externas- el sistema de ecuaciones (1) y (5) que describe los movimientos del fluído adopta la forma

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho}(\xi + \frac{\eta}{3})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{v}) \qquad (7)$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{dp}{dt} + \rho\vec{\nabla}\circ\vec{v} = 0 \qquad (8)$$

Analicemos en este fluído perturbaciones pequeñas de la presión y de la densidad con respecto a una posición de equilibrio; es decir, consideremos que

$$p = p_0 + p' \;,\; \rho = \rho_0 + \rho' \qquad (9)$$

Entonces, tomando sólo la parte lineal de las expresiones para la densidad y para la presión dinámica (la cual escribiremos en lo adelante sin la prima para simplificar las expresiones) llegamos a

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p = \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}(\xi + \frac{\eta}{3})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{v}) \qquad (10)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla}\circ\vec{v} = 0 \tag{11}$$

El sistema de ecuaciones (10)-(11) es nuestro sistema básico de ecuaciones lineales para describir las pequeñas oscilaciones en el fluído viscoso y compresible. Sencillas operaciones matemáticas nos permiten llevar este sistema a la siguiente ecuación diferencial equivalente:

$$L[p] \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p}{\partial t} - M\nabla^2 p\right] - \nabla^2 p = 0 \tag{12}$$

donde hemos representado por

$$M = \frac{1}{\rho_0}\left(\xi + \frac{4\eta}{3}\right) \tag{13}$$

al parámetro fundamental de la viscosidad.

La ecuación (12) la denominamos ecuación fundamental para las pequeñas oscilaciones en un fluído viscoso y compresible y, según se aprecia, es una ecuación diferencial en derivadas parciales de tercer orden no clásica que se reduce a la conocida ecuación de D'Alembert para las ondas acústicas en un fluído ideal en el caso en que el parámetro de viscosidad $M=0$. No es difícil comprobar que la variación de la densidad del fluído satisface esta misma ecuación.

2. *RELACIONES DE DISPERSIÓN*

Propongamos en (12) una solución de la forma

$$p = p_0 e^{i(\vec{k}\circ\vec{x}+\omega t)} \tag{14}$$

con $\vec{k}=\{k_1,k_2,k_3\}$ y $\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$.

Colocando (14) en (12) se obtiene

$$c^2k^2 + i\omega Mk^2 - \omega^2 = 0 \tag{15}$$

ecuación que expresa la ley de dispersión de las ondas en el fluído viscoso compresible. La solución de (15) puede expresarse en la forma

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{c^4+\omega^2M^2}}\, e^{-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega M}{c^2}} \tag{16}$$

que se reduce a la conocida expresión de dispersión de las ondas acústicas en un fluído ideal para $M=0$. Una forma equivalente de (16) es:

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{2}\,\sqrt{c^4+\omega^2M^2}}\left\{\sqrt{\sqrt{c^4+\omega^2M^2}+c^2} + i\sqrt{\sqrt{c^4+\omega^2M^2}-c^2}\right\} \tag{17}$$

La expresión (17) nos permite afirmar que tiene lugar el amortiguamiento de la onda plana al propagarse en el fluído a consecuencia de la viscosidad. La parte imaginaria del número de onda es la responsable de dicho amortiguamiento y su expresión

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}\ \sqrt{c^4+\omega^2M^2}} \sqrt{\sqrt{c^4+\omega^2M^2} - c^2} \qquad (18)$$

ha sido aquí obtenida sin ningún tipo de restricción para los valores del parámetro de viscosidad M. En el caso en que $M \to 0$, $k_2 \to 0$ y el amortiguamiento desaparece. La expresión (18) es la contribución al amortiguamiento debida exclusivamente a la viscosidad. Consideremos, además, la contribución asociada a la conducción del calor; para ello tengamos en cuenta que la variación de la energía mecánica del sistema debido a los gradientes de temperatura creados por la onda es [14]:

$$E_m = \frac{\varkappa}{T} \int (\vec{\nabla}T)^2 dV \qquad (19)$$

Este es el término que da cuenta de E_m por razones de termoconducción; $\varkappa$ es el coeficiente de conductividad térmica. La alteración de la temperatura T' del medio en relación con la temperatura inicial T es [14]:

$$T = \frac{cT}{c_p} \beta v \qquad (20)$$

donde $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ es el coeficiente de dilatación térmica.

Sencillos cálculos conducen a

$$\dot{E}_m = \frac{\varkappa\ \beta^2 c^2 T}{c_p^2} k^2 v^2 V_0 \qquad (21)$$

donde V_0 es el volumen del fluído. Colocando en (21) k^2 despejado de (15)

y teniendo en cuenta que [14] $c_p - c_v = T\beta^2 c^2 \frac{v^c}{c_p}$ se llega, finalmente a:

$$|\dot{E}_m| = \frac{\varkappa\ v_0^2\ V_0^2}{2}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \frac{\omega^2}{\sqrt{c^4 + M^2\omega^2}} \qquad (22)$$

donde v_0 es la media temporal de la velocidad de las partículas de fluído.

La expresión (22) representa la contribución a las pérdidas de energía debido a la termoconducción y se reduce a la obtenida por Landau [14] cuando el fluído no es viscoso (M=0). Producto de esta disipación, la onda decrece en amplitud la cantidad $e^{-\gamma_0 x}$ donde

$$\gamma = \frac{\dot{E}_m}{2c\bar{E}} = \frac{\varkappa}{2c\rho}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\frac{\omega^2}{\sqrt{c^4+M^2\omega^2}} \tag{23}$$

donde $\bar{E} = \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$ es la energía media. La expresión (23) se reduce a la de Landau [14] si M=0. Sumando (18) y (23) obtenemos el decremento logarítmico total debido tanto a la viscosidad, como a la conducción de calor. La expresión final es:

$$\gamma = \frac{\omega}{\sqrt{c^4+M^2\omega^2}}\left\{\frac{\varkappa\,\omega}{2c\rho}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) + \frac{\sqrt{\sqrt{c^4+M^2\omega^2} - c^2}}{\sqrt{2}}\right\} \tag{24}$$

En el caso particular en que $\omega^2 M^2 << c^4$ de (24) se obtiene

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left\{\left(\xi + \frac{4\eta}{3}\right) + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right\} \tag{25}$$

La expresión (25) coincide exactamente con la reportada por Landau [14] obtenida por otros medios para el amortiguamiento en el caso de fluídos de viscosidad pequeña, cuestión ésta que nos ayuda a confirmar la validez del resultado general (24) obtenido por nosotros.

3. ONDAS VISCOSAS

Supongamos que el fluído que investigamos es incompresible; entonces desde el principio de nuestras deducciones debemos suponer $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ y $M=\nu=\frac{\eta}{\rho_0}$. Para este caso la expresión (24) adopta la forma

$$\gamma = \frac{\omega}{\sqrt{c^4+\nu^2\omega^2}}\left\{\frac{\varkappa\,\omega}{2c\rho}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) + \frac{\sqrt{\sqrt{c^4+\nu^2\omega^2}-c^2}}{\sqrt{2}}\right\} \tag{26}$$

Considerando la conductividad térmica baja ($\varkappa \approx 0$) y viscosidad cinemática grande y frecuencia alta de la onda sonora ($\omega^2\nu^2 >> c^4$), de (26) se llega a la expresión

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2\,\nu}} \tag{27}$$

La fórmula (27) fue obtenida por Brejovskij y Goncharov [13] al estudiar el amortiguamiento de una onda excitada por una placa vibrando en su plano en un medio viscoso.

Con un dispositivo experimental puede medirse el amortiguamiento de una onda sonora de frecuencia ω conocida. Para amplitudes pequeñas y frecuencias altas la aproximación es buena y la viscosidad cinemática, de (27), es

$$\nu = \frac{\omega}{2\gamma^2} \tag{28}$$

La fórmula (24) permite -a diferencia de (26) y (28)- conocer el amortiguamiento de la onda para cualquier rango de valores de la viscosidad y de la frecuencia, lo que podría ser de gran utilidad en la industria.

4. *CONCLUSIÓN*

La fórmula (24) resulta de gran importancia, ya que sirve para calcular cualquier valor de la viscosidad y contiene en el límite como casos particulares a las fórmulas conocidas (25) y (27). Es innecesario -por lo evidente- recalcar la importancia que ésto tiene para la realización de experimentos.

La figura 1 representa la dependencia de γ como función de η para ω, c y ρ fijos ($\varkappa \approx 0$) de los resultados arriba expresados. La curva (1) representa la dependencia según (25) (Landau); la curva (2) representa dicha dependencia de acuerdo con (27) (Brejovskij y Goncharov) y la curva (3) de la gráfica de la expresión (24) obtenida en el presente trabajo. Como puede apreciarse, la fórmula propuesta no presenta divergencias y, además, conduce a otras fórmulas aproximadas como casos particulares; ello la hace muy atractiva físicamente.

Lo expuesto en el presente trabajo, de acuerdo con nuestro conocimiento, constituye un primer intento de estudiar una descripción general de los procesos de pequeñas oscilaciones en fluídos viscosos sin considerar limitación alguna en los parámetros de viscosidad, por lo que resulta de gran interés para la investigación teórica de dichos procesos tanto desde el punto de vista matemático, como desde el punto de vista físico.

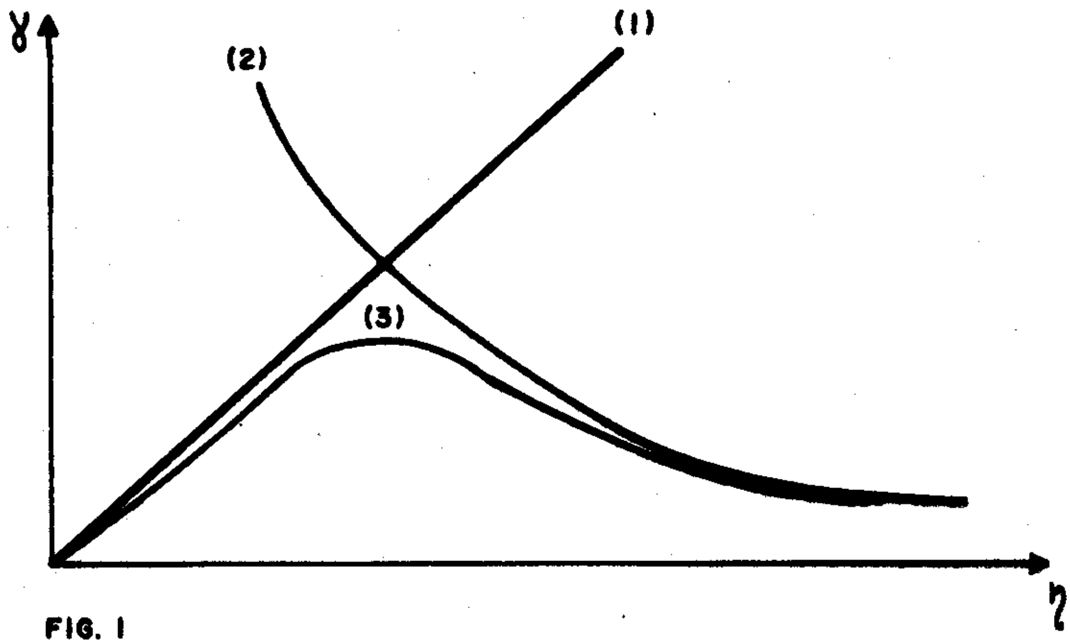

FIG. I

(1) Landau, (2) Brejovskij - Goncharov, (3) Nueva relación

BIBLIOGRAFÍA

1. Nevolin, V.G. (1983)
Excitaciones paramétricas de oscilaciones de un fluído que se desborda de un recipiente. Izv. AN SSSR. Mecanica Zhid. y gaza. Vol. 18, No. 2, 150-152, 1983; Fluid Dyn. (USA) Vol. 18, No. 2, 293-295.

2. Semenova, I.P. y A.E. Yakubenko (1983)
Regímenes de ondas estacionarias en una película de líquido viscoso que fluye a lo largo de una pared vertical. Izv. AN SSSR. Mecanica Zhid. y gaza Vol. 18, No. 3, 16-22, 1983; Fluid Dyn. (USA), Vol. 18, No. 3, 349-355.

3. Campos, L.M.B. (1983)
Tendencias modernas en la investigación de ondas en fluídos II. Propagación y disipación en atmósferas compresibles e ionizadas. Port. Phys. (Portugal), Vol. 14, No. 3-4, 145-173. 1983.

4. Palko, L.S. (1983)
Sobre cierta representación general de la solución de ecuaciones en los problemas de hidrodinámica de líquidos viscosos. Dopv. Akad. Nauk Uk RSR, seria A, No. 10, 33-37.

5. Shik, P.; G.E. Smith; G.S. Springer y Y. Rimo (1983)
Condiciones de frontera para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles por un método implícito de factorización. J. Comput. Phys. (USA), Vol. 52, No. 1, 54-79, 1983.

6. Vasin, S.V. y N.G. Tamurov (1983)
Efecto de la compresibilidad de un fluído viscoso sobre las oscilaciones libres de una lámina circular elástica que interactúa con el fluído. Sov. Appl. Mech. (USA), Vol. 19, No. 7, 604-609, 1983; Prikl. Mej. (URSS), Vol. 19, No. 7, 48-54.

7. Riley, N. (1984)
Progressive surface waves on a liquid of non-uniform depht. Wave Motion (Netherlands), Vol. 6, No. 1, 15-22, 1984.

8. Anile, A.M. y S. Pluchino (1984)
Wave modes in non-local fluid dynamics. J. Mec. Theor. and Appl. (Frame), Vol. 3, No. 2, 167-179.

9. Gao Zhi, Lu Wen-qiang (1983)
On waves in nonadiabatic and nonequilibrium gases. Acta Phys. Sin (China) Vol. 32, No. 6, 713-722, 1983. English translation in Chin. J. Phys. (USA).

10. Fried, H.M. y J. Tessendorf (1984)
Green's functions at zero viscosity. J. Math. Phys. (USA), Vol. 25, No. 4, 1144-1154.

11. Kiuken, G.D.C. (1984)
Wave propagation in fluid lines. Appl. Sci. Res. (Netherlands), Vol. 41, No. 2, 69-91.

12. Aslanov, S.K. (1983)
Excitación hidrodinámica de ondas por una superficie caliente en un líquido viscoso. Guidromejánica (URSS), No. 7, 18-25.

13. Brejovskij, L.M. y V.V. Goncharov
Introducción a la mecánica de los medios continuos. Moscú, Nauka.

14. Landau, L.D. Lifshits (1967)
Curso de Física Teórica, Tomo VI. Mecánica de los Fluídos. Moscú, Nauka.