

# Sobre la difracción de una onda electromagnética en un sistema de ranuras. Caso plano

José Marín Antuña, Vladimir Martínez Santana

## RESUMEN

En la teoría y la técnica de las antenas de ranura es de gran interés la solución del problema sobre la radiación de ondas electromagnéticas desde un sistema de ranuras en la pared de una guía de ondas. Continuando un trabajo anterior, los autores resuelven de forma exacta este problema con la ayuda de la teoría de las ecuaciones integrales y de las modernas técnicas de computación.

## ABSTRACT

The theory and technical applications of cleft antenna are very interesting for the solution of the problem of radiation of electromagnetic waves from a system of clefts in the wall of a wave guide. The authors continue a precedent paper and resolve exactly this problem using the theory of integral equations and the modern computational methods.

## INTRODUCCIÓN

La utilización en la técnica de líneas de comunicación formadas por guías de ondas [1], de uniones complejas de ranuras en guías de ondas [2,3] y de sistemas de ranuras irradiantes [4] conduce al estudio del

problema de la unión electromagnética entre dos volúmenes a través de una o varias ranuras. El empleo de líneas de comunicación formadas por guías de ondas ha pasado a ser -con el desarrollo de la física de semiconductores, la óptica, la cristalografía y la tecnología de circuitos integrados entre otros- una técnica cotidiana. En un trabajo anterior [5] se presenta un algoritmo para la solución del problema sobre la radiación de energía a través de una ranura practicada en la pared de una guía de ondas en el que la combinación acertada de la teoría de ecuaciones integrales y las posibilidades de las técnicas modernas de computación permitieron dar una solución acabada al problema que anteriormente sólo recibía un tratamiento generalmente aproximado y asintótico. En la presente publicación presentamos una generalización de dicho cálculo al caso en que en la pared de la guía de ondas están practicadas varias ranuras.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea un sistema formado por dos guías de ondas de ancho  $a_1$  y  $a_2$  respectivamente constituidas por placas planas infinitas y conductoras perfectas (Figura 1). Consideramos el sistema al vacío y que en la placa central hay  $Q$  ranuras de ancho  $l(p)$ ;  $b(p)$  es la distancia de la ranura  $p$  a la ranura  $p+1$ . Por la guía inferior se propaga desde  $-\infty$  una onda de componentes  $E_x$ ,  $E_z$  y  $H_y$  no nulas; las restantes componentes son nulas. La componente  $H_y$  la supondremos

$$H_y = u(x, z) = Ae^{i\gamma_m z} \cos \alpha_m x \quad (1)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\gamma_m^2 = k^2 - \alpha_m^2$ ,  $k$  es el vector de onda y  $\alpha_m = m\pi/a_2$  ( $m$  es un número fijo dado). Aquí hemos considerado la dependencia temporal como  $\exp(-i\omega t)$  ( $\text{Im } \gamma_m > 0$ ), donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda.

Nuestro objetivo es determinar los campos resultantes producto de la difracción de esta onda al incidir en el sistema de ranuras de la pared central que separa a las dos guías. Matemáticamente, el problema se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

con las condiciones

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a_1} = 0 \quad \forall z$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-a_2} = 0 \quad \forall z \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \forall z \leq 0 \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \forall z \in \left\{ 1(p) + \sum_{j=1}^{p-1} [1(j)+b(j)], \sum_{j=1}^p [1(j)+b(j)] \right\} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = f_p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} [1(j)+b(j)], \sum_{j=1}^p [1(j)+b(j)] \right\} \quad (6)$$

donde  $f_p(z)$  es la componente  $E_z$  en la  $p$ -ésima ranura. La solución debe, además, cumplir las condiciones de radiación [5,6]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{si } a_1 = \infty \quad (7)$$

$$u(x, z) = A e^{i\gamma_m z} \cos \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n z} \cos \alpha_n x \quad (8)$$

para  $z \leq 0$

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n z} \cos \alpha_n x \quad (9)$$

para  $z \geq \sum_{j=1}^Q [1(j)+b(j)] \cap x \in (-a_2, 0)$

que tienen el sentido físico de la ausencia de ondas provenientes desde el infinito, salvo la onda incidente.

Nuestro problema consiste en determinar los coeficientes  $R_n$  y  $T_n$  y el campo en la guía superior. Las expresiones que se obtienen son:

$$R_n = \frac{i}{\gamma_n a_2} \sum_{p=1}^Q (-1)^{n+1} \int_{I(p)}^{D(p)} e^{i\gamma_n z} f_p(z) dz \quad (10)$$

$$T_n = A \delta_{nm} + \frac{i}{\gamma_n a_2} \sum_{p=1}^Q (-1)^n \int_{I(p)}^{D(p)} e^{-i\gamma_n z} f_p(z) dz \quad (11)$$

donde hemos introducido la notación

$$D(p) = 1(p) + \sum_{j=1}^{p-1} [1(j)+b(j)], \quad I(p) = \sum_{j=1}^{p-1} [1(j)+b(j)] \quad (12)$$

El campo en el volumen superior tiene la forma

$$u(x, z) = \sum_{p=1}^Q \int_{I(p)}^{D(p)} f_p(\xi) G(x, z; 0, \xi) d\xi \quad (13)$$

donde  $G$  es la función de Green, solución del problema

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right| = 0 \quad \text{sobre las paredes} \quad (15)$$

y que se expresa por las ecuaciones

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{a_1 \sigma_n} \cos \frac{n\pi x}{a_1} \cos \frac{n\pi \xi}{a_1} e^{i\sigma_n |z-\zeta|} \quad (16)$$

en el caso en que  $a_1$  es finito;  $\sigma_n^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{a_1}\right)^2$ , y

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \frac{i}{4} \left[ H_0^{(1)} \left( kr_{MP} \right) + H_0^{(1)} \left( kr_{MP'} \right) \right] \quad (17)$$

en el caso en que  $a_1$  es infinito.  $P=(\xi, \zeta)$ ,  $P'=(-\xi, \zeta)$ .

## 2. PATRÓN DE EMISIÓN

En el caso en que el volumen superior sea un semi espacio ( $a_1 = \infty$ ) tiene interés el cálculo del patrón de emisión (diagrama direccional) del campo irradiado por la antena formada por el sistema de ranuras. Esto significa hallar la componente angular del campo irradiado para distancias muy grandes del sistema de ranuras ( $r \rightarrow \infty$ ). Tomando las fórmulas asintóticas y realizando los cálculos correspondientes, se obtuvo la expresión siguiente para el patrón de emisión del sistema de ranuras

$$\phi(\phi) = \sum_{p=1}^Q \frac{D(p)}{I(p)} \int f_p(\zeta) e^{ik \left[ \zeta - \frac{D}{2} \right] \sin \phi} d\zeta \quad (18)$$

donde  $D = \sum_{p=1}^Q [l(p) + b(p)]$  es la longitud total del sistema de ranuras. La fórmula (18) nos da el patrón de emisión en un sistema de coordenadas cuyo origen se encuentra en el centro del sistema de ranuras (Figura 2).

## 3. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA A UNA ECUACIÓN INTEGRAL

La solución del problema (2)-(6) puede expresarse en términos de la función de Green de la siguiente manera:

$$u(x, z) = Ae^{i\gamma_n z} \cos \alpha_n x - \sum_{p=1}^Q \int \frac{D(p)}{I(p)} f_p(\zeta) G_2(x, z; 0, \zeta) d\zeta \quad (19)$$

para la guía inferior, y

$$u(x, z) = \sum_{p=1}^Q \int \frac{D(p)}{I(p)} f_p(\zeta) G_1(x, z; 0, \zeta) d\zeta \quad (20)$$

para la región superior, donde  $G_1$  y  $G_2$  son las funciones de Green correspondientes. Exigiendo la continuidad de la solución sobre cada una de las ranuras ( $x=0$ ,  $z \in [I(p), D(p)]$ ) se obtiene la siguiente ecuación integral para las funciones  $f_p$

$$(-1)^m A e^{i\gamma_m z} = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{I(p)}^{D(p)} f_p(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta \quad (21)$$

donde  $K(z, \zeta) = G_1 + G_2$ . La ecuación (21) es una ecuación integral de Fredholm de primer tipo que, sin embargo, es un problema correcto debido a que su núcleo tiene una singularidad regularizadora sobre la diagonal  $\zeta = z$ , ya que es la suma de dos funciones de Green [7].

#### 4. RESULTADOS OBTENIDOS

Para resolver la ecuación (21) la llevamos a un sistema de ecuaciones algebraicas de forma análoga a lo reportado en [5] y utilizamos las técnicas de solución con la ayuda de algoritmos de computación. Los resultados obtenidos se ofrecen en los gráficos que a continuación se exponen.

En los cálculos graficados supusimos el volumen superior infinito y la guía inferior de ancho  $a_2 = A$  y, además, todas las ranuras de igual ancho  $L$  y equidistantes. En las figuras (3.a) y (3.b) se muestra el patrón de emisión para el caso  $A=L$  calculado para un sistema de dos y de cuatro ranuras, superpuestos al calculado para una ranura: este último coincide exactamente con lo reportado en [5], como era de esperar. La Figura (4) muestra superpuestos los patrones de emisión de una, dos, tres y cuatro ranuras para  $A=10L$  y la Figura (5) los mismos resultados para  $A=100L$ . En este último caso en el que las ranuras son muy estrechas en comparación con las dimensiones de la guía inferior, no es apreciable la direccionalidad del patrón, lo que experimentalmente es conocido. Las Figuras (6.a) y (6.b) muestran, a modo de ejemplo, los gráficos del módulo de las funciones  $f_p(\zeta)$  (componente  $E_z$  del campo en las ranuras) para una y varias ranuras en el caso  $A=L$ . Aquí se aprecia claramente la singularidad del tipo  $[(x-I(p)(x-D(p)))]^{-1/2}$  que dichas funciones deben tener en los bordes de las ranuras, en correspondencia con la condición de Meissner para la difracción en el borde agudo de una pantalla [8].

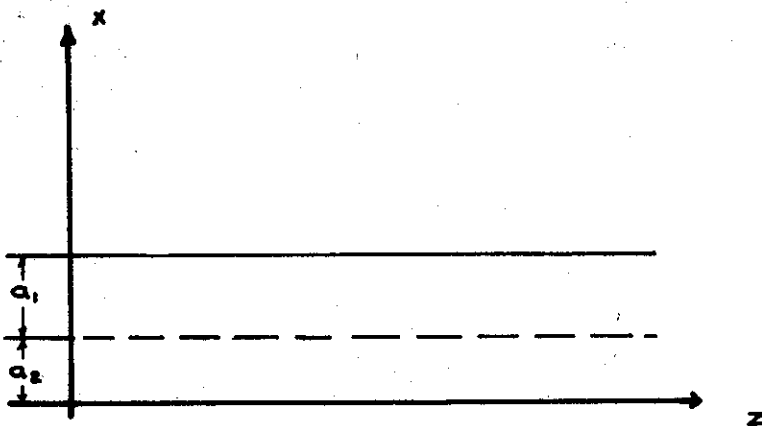
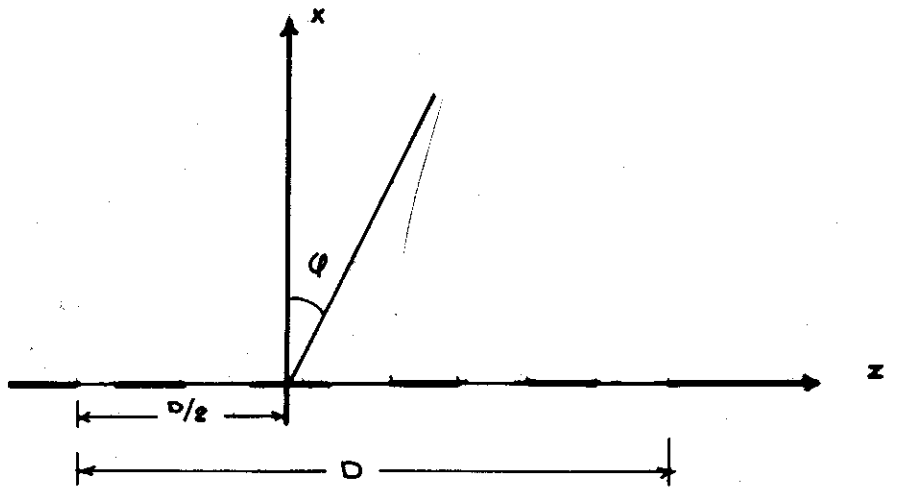


Figura 1.

Figura 2.



A=L

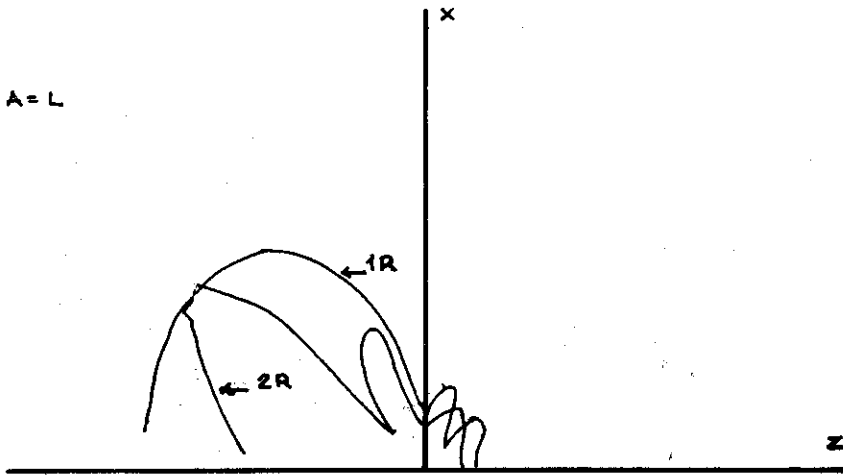
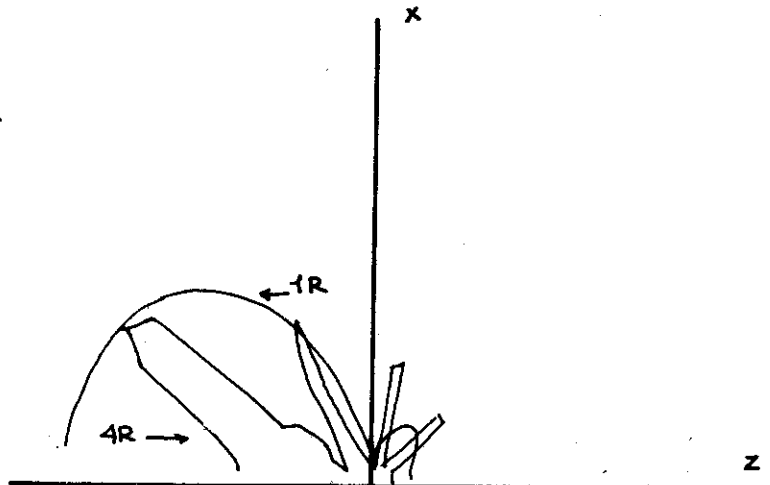


Figura 3a.

A=L

Figura 3b.



$A=10L$

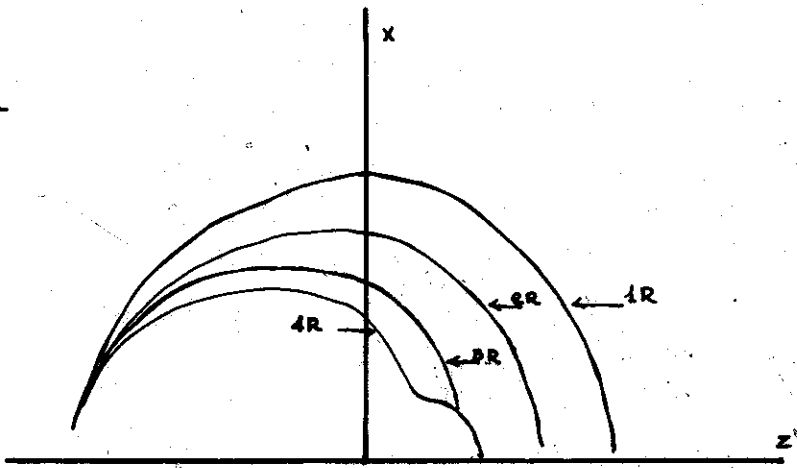


Figura 4.

$A=100L$

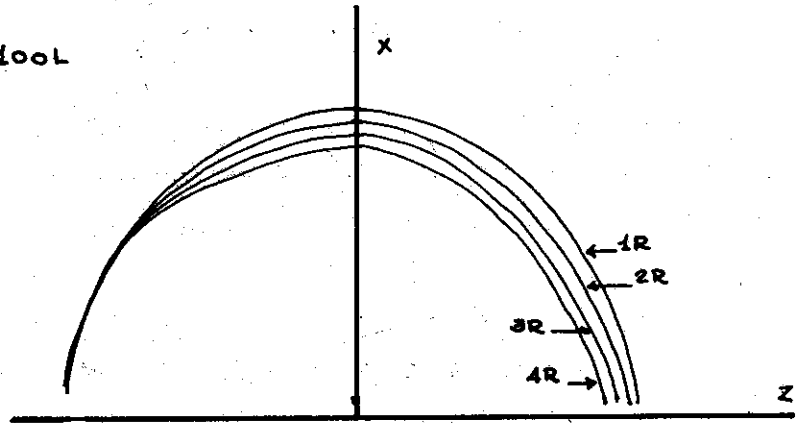


Figura 5.

$A=L$

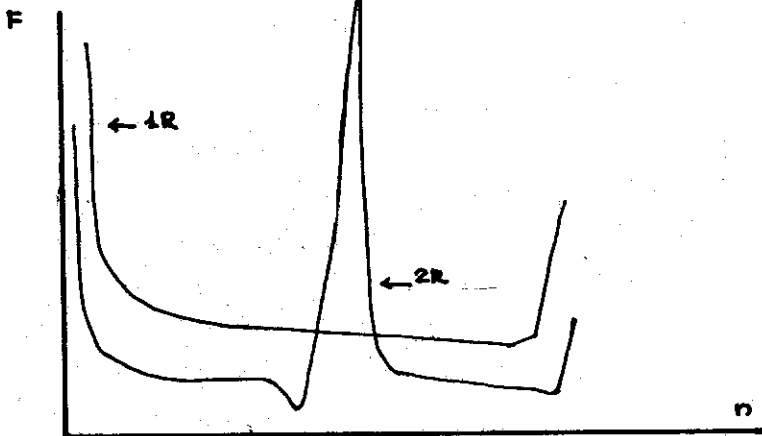


Figura 6a.

$A=L$

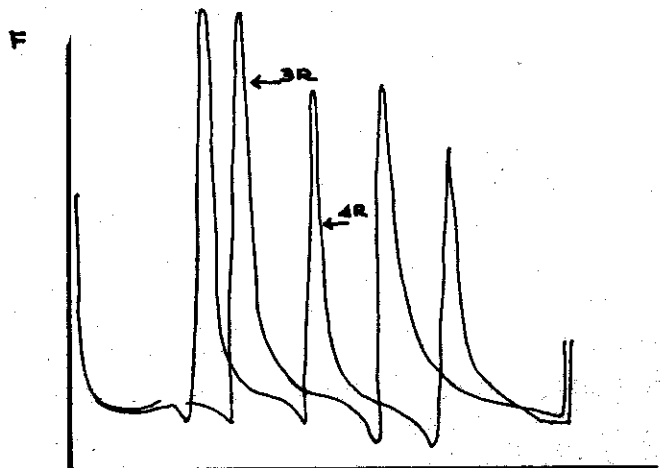


Figura 6b.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Kaznacheiev, Y. I. (1959). *Comunicaciones de larga distancia en guías de ondas*. Moscú. Editorial de la AC de la URSS.
2. Levinson, I. B.; P. S. Fridberg (1966). *Uniones de ranuras en guías de ondas rectangulares homogéneas*. Radiotécnica y Electrónica, tomo 11,5, 831-838; Radiotécnica y Electrónica, tomo 11,6, 1076-1085.
3. Dorfman, L. G.; V. V. Filatov (1966). *Sobre los parámetros eléctricos de los puentes de ranura en guías de ondas*. Radiotécnica y Electrónica, tomo 11,11, 1933-1943.
4. Evstropov, G. A.; S. A. Tsarapin (1966). *Cálculo de antenas de ranura en guías de ondas, teniendo en cuenta la interacción de los emisores respecto a la onda principal*. Radiotécnica y Electrónica, tomo 11,5, 822-830.
5. Marín Antuña, J. (1988). *Sobre la radiación de una ranura en una guía de ondas plana*. Revista Cubana de Física, Vol. VIII, No. 3, 14.
6. Sviéshnikov, A. G. (1950). *El principio de Radiación*. Doklady AN SSSR, 73, 5,.
7. Tíjonov, A. N. (1963). *Sobre la solución de problemas incorrectamente planteados y un método de regularización*. Doklady AN SSSR, 151, 3, 501-504.
8. Noble, B. (1962). *El método de Wiener-Hopf*. Moscú, I. L.