Ondas en medios viscosos compresibles

José Marín Antuña, Oscar Sotolongo Costa, Dpto. de Física Teórica. Universidad de La Habana

RESUMEN

Los autores continúan el desarrollo de la investigación teórica de los procesos oscilatorios en fluidos viscosos compresibles comenzados en un trabajo anterior y demuestran la existencia de frecuencias límites de las oscilaciones, de ondas esféricas y cilíndricas y de ondas gravitacionales en el medio. Los resultados obtenidos generalizan la teoría existente de ondas en medios viscosos y la contemplan cómo un caso particular.

ABSTRACT

The authors continue the development of theoretical research of the processes of oscilation in viscose comprehesible fluids, wich began in a first paper and prove the existence of limit frequence for the oscilations, of spherical and cylindrical waves and of gravitational waves in the fluid. The obtained results generalize the existent theory of waves in viscose fluids and obtain it like a particular case.

INTRODUCCIÓN

En [1] fue obtenida la ecuación

$$L[u] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - M\nabla^2 u\right] - \nabla^2 u = 0 \qquad (1)$$

que describe las pequeñas oscilaciones de la presión dinámica y de la concentración en un fluido viscoso compresible. Aquí $M=\frac{1}{\rho}\left(\xi\frac{4\eta}{3}\right)$ es el parámetro de viscosidad, donde η es la viscosidad newtoniana y ξ la segunda viscosidad; ρ es la densidad del fluido y c la velocidad del sonido en el medio. En el citado trabajo estudiamos las relaciones de dispersión y logramos establecer la existencia de amortiguamiento de las ondas en el medio debido a la existencia de la viscosidad. Por último, logramos establecer una dependencia funcional general entre el amortiguamiento de las ondas y la viscosidad que contiene, como casos particulares, a fórmulas obtenidas por otras vías por otros autores para viscosidades pequeñas [2] y para viscosidades grandes [3], así como una dependencia general entre el amortiguamiento y la frecuencia de las oscilaciones que reproduce con buena coincidencia los resultados experimentales.

En el presente trabajo reportamos la continuación de cálculos relacionados con la investigación teórica de los procesos oscilatorios en fluidos viscosos compresibles, la existencia de frecuencias límites para las oscilaciones, de ondas esféricas y cilíndricas y de ondas gravitacionales en el medio. Los resultados obtenidos generalizan la teoría existente de ondas en medios viscosos y la contemplan como un caso particular.

1. *Frecuencias límites*

Mediante el procedimiento estándar de separación de variables en la ecuación (1); es decir, proponiendo una solución del tipo $u(x,t)=v(x)T(t)$ $(x=\{x_1,x_2,x_3\})$, se obtienen para las funciones $T(t)$ y $v(x)$, respectivamente, las ecuaciones

$$T''+\lambda MT'+\lambda c^2T=0, \qquad \nabla^2v+\lambda v=0 \tag{2}$$

La solución general para $T(t)$ tiene la forma:

$$T(t)=A_1e^{-\frac{\lambda Mt}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{\lambda^2M^2-4\lambda c^2}}+A_2e^{-\frac{\lambda Mt}{2}-\frac{t}{2}\sqrt{\lambda^2M^2-4\lambda c^2}} \tag{3}$$

de donde se concluye que, para la existencia de procesos oscilatorios en el medio viscoso debe cumplirse que

$$\lambda<\left(\frac{2c^2}{M}\right) \tag{4}$$

Esto significa una acotación para los autovalores que surjan del problema de Sturm-Liouville; es decir, que existen frecuencias límites para las oscilaciones en nuestro medio. Valores superiores a $\lambda_{lim}=\left(\frac{2c^2}{M}\right)$ dan procesos sobreamortiguados, no oscilatorios.

2. *Ondas esféricas*

Denotemos $\lambda \equiv k^2$. Entonces la parte temporal (3) de la solución adopta la forma

$$T(t) = e^{-\frac{k^2Mt}{2}} (A_1 \cos k\alpha t + A_2 \operatorname{sen} k\alpha t) \tag{5}$$

donde $$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 - k^2M^2} \tag{6}$$

Considerando la parte espacial dependiente sólo de r en R^3, la ecuación de Helmholtz en (2) adopta la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dv}{dr}\right) + k^2 v = 0 \tag{7}$$

cuya solución, como se conoce, es

$$v(r) = \frac{1}{kr}(C_1 \operatorname{sen} kr + C_2 \cos kr) \tag{8}$$

Por consiguiente, la solución de (1) en este caso puede expresarse como

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{k^2Mt}{2}}}{kr} D \cos(kr - k\alpha t) + \frac{e^{-\frac{k^2Mt}{2}}}{kr}\left[A \operatorname{sen} kr \cos k\alpha t + B \cos kr \operatorname{sen} k\alpha t\right] \tag{9}$$

donde hemos redefinido las constantes independientes que, como estamos en presencia de una ecuación de tercer orden, son sólo tres. El primer sumando a la derecha de (9) tiene la forma explícita de una onda esférica divergente. El segundo sumando a la derecha de (9) puede ser transformado en una onda esférica convergente.

3. *Ondas cilíndricas*

Si consideramos simetría cilíndrica en la ecuación (2), para la parte espacial no es difícil obtener la solución en la forma

$$u(x,t) = u_0 e^{-\frac{k^2Mt}{2}} e^{ik\alpha t} J_0(kR) \tag{10}$$

que, para distancias grandes es

$$u(x,t) = u_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\left(-\frac{k^2Mt}{2} + ik\alpha\right)t} \frac{\cos(kR - \pi/4)}{\sqrt{kR}} \tag{11}$$

de donde se ve que la amplitud disminuye como $1/\sqrt{R}$.

$A_0 e^{-\gamma x}$

La onda cilíndrica se interpreta como una onda en R^3 con simetría axial, por lo que puede ser obtenida por el método del descenso de Hadamard, integrando la solución de la onda esférica. Si hacemos en la onda divergente de (9) $r^2=R^2+z^2$ e integramos respecto a z, queda:

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{-\frac{k^2Mt}{2}}}{k} \int_0^\infty \frac{\cos k(r-\alpha t)}{r} dz =$$

$$= u_0 \frac{e^{-\frac{k^2Mt}{2}}}{k} \int_0^\infty \frac{\cos k(r-\alpha t)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dz \qquad (12)$$

Si $\xi=r-\alpha t$:

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{-\frac{k^2Mt}{2}}}{k} \int_{k-\alpha t}^\infty \frac{\cos k\xi \, d\xi}{\sqrt{(\xi + \alpha t)^2 - R^2}} \sim \frac{e^{-\beta t}}{\alpha t} \qquad (13)$$

lo que evidencia que estamos en presencia de una onda que decrece más rápidamente que en el caso no viscoso.

4. *Ondas gravitacionales*

Hagamos un estudio de las ondas gravitacionales descritas por la ecuación (1) de manera similar a cómo esto se efectúa en la literatura conocida [2].

Aquí y en lo adelante representaremos $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ y Oz lo tomaremos dirigido en la dirección de la gravedad.

En la ecuación (1) consideramos que u es la presión dinámica en el fluido. Entonces, teniendo en cuenta la relación entre la presión y la condensación s:

$$p = c^2\rho s \qquad (14)$$

y que $\vec{v}=-\vec{\nabla}\varphi$ y $\vec{\nabla}.\vec{v}=-\frac{\partial s}{\partial t}$,

concluimos que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2\rho\nabla^2\varphi \qquad (15)$$

La condición de frontera impuesta por Landau [2] en la superficie del fluido para oscilaciones pequeñas es aplicable, en medida aproximada, a nuestro caso y como primera aproximación la utilizaremos. Esta es:

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\right|_{z=0} = 0 \qquad (16)$$

Aquí g es la aceleración de la gravedad. Teniendo en cuenta (15), para la presión dinámica obtenemos la condición de frontera correspondiente, de manera que nuestro problema a resolver es:

$$\begin{cases} L[u] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - M\nabla^2 u\right] - \nabla^2 u = 0 \\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Sólo intentamos describir el proceso físico a lo largo del eje Oz, por eso consideraremos soluciones simétricas respecto a y: $u(x,y,z,t) \equiv u(x,z,t)$.

Separando variables: $u(x,z,t)=v(x,z)T(t)$, obtenemos:

$$\begin{cases} \nabla_2^2 v + \lambda v = 0 \\ \left.\left(T\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{g}vT''\right)\right|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

donde

$$T(t) = e^{\alpha t}, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\lambda M}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 M^2 - 4\lambda c^2} \tag{19}$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Tomemos $v(x,z)=e^{kz}f(x)$, $k=\sqrt{\lambda}$, $z<0$. Colocando en (18) y resolviendo queda:

$$f(x) = e^{i\sqrt{2}\,kx} \tag{20}$$

$$v(x,z) = e^{k\langle z+i\sqrt{2}\,x\rangle} \tag{21}$$

Apliquemos la condición de frontera. Teniendo en cuenta la forma de las soluciones, se obtiene

$$k + \frac{1}{g}\alpha^2 = 0$$

de donde

$$k = -\frac{\alpha^2}{g} \tag{22}$$

La ecuación (22) es la ley de dispersión en este caso. Si $M=0$ (no hay viscosidad y el fluido es ideal), se obtiene $\alpha^2 = -\omega^2$ y (22) da:

$$k = \frac{\omega^2}{g} \tag{23}$$

que es el mismo resultado reportado en [2].

Así pues, la presión dinámica en las ondas gravitacionales que viajan de izquierda a derecha por x y de arriba hacia abajo por z es:

$$u = A\, e^{kz + i\sqrt{2}\,kx + \alpha t} \tag{24}$$

Es posible obtener la velocidad de la onda a partir de la relación de dispersión. De (22):

$$\sqrt{kg} = i\alpha = -i\frac{\lambda M}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda c^2 - \lambda^2 M^2} \tag{25}$$

Sea

$$\omega = \sqrt{4\lambda c^2 - \lambda^2 M^2} \qquad (26)$$

Entonces, colocando (26) en (25) y derivando con respecto a k, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\frac{dw}{dk} - i\frac{M}{2}2k \qquad (27)$$

Para $M \longrightarrow 0$ (no hay viscosidad) obtenemos de (27) que la velocidad de las ondas gravitacionales es

$$\frac{dw}{dk} = \sqrt{\frac{g\Lambda}{2\pi}} \qquad (28)$$

La velocidad de las ondas gravitacionales aumenta con la longitud de onda Λ, resultado que coincide con el obtenido en [2].

5. *Amortiguamiento de las ondas gravitacionales*

El factor de amortiguamiento de la amplitud es $e^{-\gamma t}$, con:

$$\gamma = \frac{\lambda M}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 M^2 - 4\lambda^2 c^2} \qquad (29)$$

Si $\lambda^2 M^2 > 4\lambda^2 c^2$, entonces

$$\gamma \backsim \lambda M \qquad (30)$$

Sea $\lambda = k_x^2 + k_z^2$, $\lambda = 2k^2$. Si suponemos que la energía de la onda se comparte en ambas direcciones, usando (23) obtenemos:

$$\gamma = \frac{2w^4 M}{g^2} \qquad (31)$$

Si el fluido es incompresible, $M=\nu$ (viscosidad cinemática) y obtenemos:

$$\gamma = \frac{2w^4 \nu}{g^2} \qquad (32)$$

que, de nuevo y como caso particular, coincide con los resultados dados en [2].

CONCLUSIÓN

Los resultados publicados en [1] y en el presente artículo nos permiten afirmar que hemos construido una teoría de ondas en medios viscosos compresibles que contiene, como caso particular, la teoría ya existente de ondas en medios viscosos incompresibles y en medios ideales. En futuros trabajos se continuará el desarrollo de la base físico-matemática para poder acometer diferentes problemas relacionados con la excitación y propagación de ondas en estos medios.

BIBLIOGRAFÍA

1. Marín Antuña, J.; O. Sotolongo Costa. (1990). *Sobre una ecuación para oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso compresible.* Revista Cubana de Física (aceptado para publicar).

2. Landau, L. D.; E. M. Lifshits. (1988). *Hidrodinámica.* Moscú, Nauka.

3. Brejovskij, L. M.; V. Goncharov. (1982). *Introducción a la mecánica de los medios continuos.* Moscú, Nauka.