SOLUCION FUNDAMENTAL Y FUNCION DE GREEN PARA LA ECUACION DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS EN UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE

José Marín Antuña, Oscar Sotolongo Costa, Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana.

RESUMEN

Se obtienen expresiones para la solución fundamental de la ecuación de las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso y compresible y se comprueba su reducción a la solución fundamental conocida para la ecuación de D'Alembert en el caso de ausencia de viscosidad. Se obtiene, además, la expresión de la función de Green para el problema de las oscilaciones radiales de la presión dinámica en una esfera con condición de frontera homogénea y la solución del problema general de las oscilaciones radiales en la esfera en términos de integrales de las condiciones iniciales y la inhomogeneidad de la ecuación y la función de Green obtenida.

ABSTRACT

The authors obtain expresions for the fundamental solution of the equation of small oscillations in a viscose and comprehesible fluid and proof his reduction to the wellknown fundamental solution for the D'Alembert's equation in the case of absence of viscosity. They obtain too the expresion of the Green's function for the problem of the radial oscillations of the dynamical pressure in a sfere with homogeneous boundary condition and the solution of the general problem of the radial oscillations in the

sfere in terms of integrals of the initial conditions and the inhomogenity of the equation and the obtained Green's function.

INTRODUCCIÓN

En los trabajos teóricos comenzados recientemente sobre el estudio de la excitación y propagación de ondas lineales en fluidos viscosos compresibles [1] se deduce una ecuación para describir las pequeñas oscilaciones en tal fluido y se hace un análisis de las principales características físicas de los parámetros de dicha ecuación. En un segundo trabajo [2] se continúa la investigación teórica de la propagación de ondas en tales medios. Con vistas a poder resolver los problemas matemáticos relacionados con esta ecuación, resulta de gran utilidad conocer la solución fundamental. Matemáticamente, ello es de importancia, debido al carácter no clásico de la ecuación obtenida; las soluciones del problema de frontera pueden ser expresadas con ayuda de la solución fundamental en forma de potenciales que permiten utilizar, para la resolución de los mismos, los métodos tradicionales de ecuaciones integrales.

1. Planteamiento del problema.

Supongamos que tenemos un fluido viscoso compresible homogéneo que ocupa todo el espacio R^3. La propagación de pequeñas excitaciones de la presión en el mismo se describe por la ecuación [1]:

$$L[u] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - M\,\nabla^2 u\right] - \nabla^2 u = 0 \qquad (1)$$

donde $u(x,t)$ es la presión dinámica, $x=\{x_1, x_2, x_3\}$, c es la velocidad del sonido y $M = \left[\xi + \frac{4}{3}\eta\right]$ (aquí η es la viscosidad cinemática y ξ la llamada segunda viscosidad, asociada a la compresibilidad [3]).

Pasemos a variables adimensionales $x_i = x_i/d$ $(i=1,2,3)$, $t=ct/d$, $\mu=M/(cd)$, donde d es cierta longitud característica. Entonces la solución fundamental, es decir, el campo de presiones excitado por la acción de una fuente unitaria, instantánea y puntual, se define [4] como la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u - \nabla^2 u = \delta(x)\,\delta(t) \qquad (2)$$

Aquí $\delta(x)$ es la conocida función delta de Dirac.

2. Obtención de la solución.

Supongamos que $u(x,t) \to 0 \;\; \forall |x| \to \infty$ y representemos por $U(x,p)$ a la transformada de Laplace de $u(x,t)$. Entonces, aplicando transformada de Laplace a (2) obtenemos

$$\nabla^2 U - \frac{p^2}{\mu p+1} U = -\frac{\delta(x)}{\mu p+1} \tag{3}$$

con $\lim\limits_{|x|\to\infty} U(x,p) = 0$

La ecuación de Helmholtz (3) tiene por solución acotada en el infinito la función:

$$U(x,p) = \frac{1}{4\pi|x|(\mu p+1)} e^{-\frac{p|x|}{\sqrt{\mu p+1}}} \tag{4}$$

Para que se cumpla la condición en el infinito escogemos la rama de $\sqrt{\mu p+1}$ que tenga para Re $p>0$ valores positivos; es decir, con un corte en Re $p<-1/\mu$.

Usando la fórmula de Mellin, no es difícil llegar a la expresión del original

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{8\pi^2\mu|x|i} \int_{1+\mu a-i\infty}^{1+\mu a+i\infty} \frac{ds}{s} \left(e^{\frac{st}{\mu} - \frac{|x|\sqrt{s}}{\mu} + \frac{|x|}{\mu\sqrt{s}}} \right) \tag{5}$$

Por medio del teorema de Cauchy deformamos el contorno de integración en (5), en el formado por la circunferencia $|s|=1$ y los rayos por los bordes superior e inferior del corte ($-\infty<$Re $s<-1$). Entonces:

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2\mu|x|} \int_0^{\pi} e^{\frac{t}{\mu}\cos\phi} \cos\left(\frac{t}{\mu}\operatorname{sen}\phi - \frac{2|x|}{\mu}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \right) d\phi -$$

$$- \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2\mu|x|} \int_1^{\infty} e^{-\frac{rt}{\mu}} \operatorname{sen}\left[\frac{|x|}{\mu}\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \right] \frac{dr}{r} \tag{6}$$

Es posible comprobar, mediante sustitución directa, que el segundo sumando de (6) satisface la ecuación (2) con parte derecha nula. Como la solución fundamental se determina con exactitud de una solución de la ecuación homogénea, por tanto la solución fundamental es:

$$G(x,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2\mu|x|} \int_0^{\pi} e^{\frac{t}{\mu}\cos\phi} \cos\left(\frac{t}{\mu}\operatorname{sen}\phi - \frac{2|x|}{\mu}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \right) d\phi \tag{7}$$

3. CASO DE FLUIDO IDEAL, NO VISCOSO.

Nótese que para $\mu=0$ (no hay viscosidad y el fluido es ideal):

$$U(x,p) = \frac{1}{4\mu|x|} e^{-p|x|} \tag{8}$$

de manera que, en este caso

$$G_{\mu=0}(x,t) = \frac{1}{8\pi^2|x|i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p(t-|x|)}dp = \frac{\delta(t-|x|)}{4\pi|x|} \tag{9}$$

que coincide exactamente con la solución fundamental de la ecuación clásica de D'Alembert, como era de esperar. Un cálculo sencillo permite comprobar que la solución fundamental (7) tiende, en el límite cuando $\mu \longrightarrow 0$, a la solución fundamental de la ecuación de D'Alembert, dada por (9). Una idea de este cálculo se brinda en el anexo de este artículo.

4. CASO UNIDIMENSIONAL

Si en la ecuación (2) consideramos soluciones con simetría en el plano (x_1, x_2), entonces, denotando $z=x_3$, la ecuación se escribe como:

$$u_{tt} - \mu u_{zzt} - u_{zz} = \delta(z)\delta(t) \tag{10}$$

La aplicación de las transformadas integrales de manera similar al punto 1 del presente artículo, permite obtener en este caso para la solución fundamental la expresión

$$u(z,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{ds}{(s-1)\sqrt{s}} \left(e^{\frac{st}{\mu} - \frac{|z|\sqrt{s}}{\mu} + \frac{|z|}{\mu\sqrt{s}}} \right) \tag{11}$$

cuyo integrando tiene un punto de ramificación en $s=0$ y un polo simple en $s=1$. La realización de cálculos similares al punto 2 nos conduce en este caso de (11) para la solución fundamental a la expresión:

$$u(z,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2\mu|z|} \int_0^{\pi} e^{\frac{t}{\mu}\cos\varphi} \cos\left(\frac{t}{\mu}\operatorname{sen}\varphi - \frac{2|z|}{\mu}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \tag{12}$$

que está en plena correspondencia con el resultado anteriormente obtenido.

En un trabajo futuro consideraremos algunos problemas con simetría espacial que permitirán sacar algunas conclusiones de interés físico sobre las características y el comportamiento de las ondas en los fluidos viscosos compresibles.

5. *FUNCIÓN DE GREEN PARA LOS PROBLEMAS DE FRONTERA EN LA ESFERA*

Consideremos un dominio esférico de radio r_0 ocupado por un fluido viscoso compresible en el cual las pequeñas oscilaciones de la presión dinámica se describen por la ecuación (1). Para condiciones de frontera homogéneas sobre la superficie de la esfera, la solución fundamental nos da la función de Green en la esfera. Los cálculos dan para la función de Green la expresión

$$G(r,R,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(k_0-k)}{\lambda_k\omega_k||v_k||^2} e^{-\frac{\lambda_k^2 M}{2}t} \operatorname{sen} \lambda_k\omega_k t \; v_k(r) \; v_k(R) \tag{13}$$

donde

$$\omega_k = \sqrt{4c^2-\lambda_k^2 M}$$

y los λ_k son los autovalores del problema de Sturm-Liouville en la esfera con autofunciones $v_k(r)$ y las condiciones de frontera homogéneas. $||v_k||^2$ es el cuadrado de la norma de las autofunciones y $\theta(k)$ es la conocida función paso unitario de Heaviside; k_0 es el máximo valor de k para el que $\lambda_k < \frac{2c}{M}$.

La solución del problema general

$$\begin{cases} L[u] = f(r,t) \;\; \forall 0\leq r\leq r_0, \; t>0 \\ U(r,0) = \varphi(r) \\ u_t(r,0) = \psi(r) \\ c.f. = 0 \end{cases} \tag{14}$$

se expresa por la fórmula integral

$$u(r,t) = \int_0^{r_0} \varphi(\xi)G_t(r,\xi,t)d\xi + \int_0^{r_0} \psi(\xi)G(r,\xi,t)d\xi + \\ + \int_0^t \int_0^{r_0} f(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)d\xi d\tau \tag{15}$$

que da las oscilaciones radiales de la presión dinámica en la esfera.

Para el caso de fluido ideal ($M \longrightarrow 0$), de (13) se obtiene el resultado conocido

$$G(r,R,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2c\lambda_k||v_k||^2} \operatorname{sen} 2c\lambda_k t \; v_k(r)v_k(R) \tag{16}$$

para la función de Green de la ecuación de D'Alembert en la esfera.

CONCLUSIONES

Los cálculos realizados constituyen una continuación consecuente de las investigaciones iniciadas en [1] y [2] sobre la excitación y propagación de ondas en fluidos viscosos compresibles. Con ellos hemos logrado obtener la solución fundamental del operador que figura en la ecuación (1), lo que nos permitirá utilizar la técnica de ecuaciones integrales para resolver problemas sobre difracción de ondas no estacionarias en diferentes obstáculos. También se obtuvo la expresión general de la función de Green en la esfera para el operador (1) que responde a condiciones de frontera homogéneas arbitrarias. Con ella la solución de los problemas con condiciones iniciales para este operador adquieren formas integrales similares a las fórmulas conocidas para los operadores clásicos, lo que, indudablemente, nos brinda grandes posibilidades de cálculo. El estudio de las soluciones fundamentales es de gran importancia, ya que con su ayuda las soluciones de los problemas que se planteen para el operador pueden expresarse en términos de potenciales. En el trabajo [7] del primero de los autores del presente trabajo se realizan cálculos de soluciones fundamentales asociadas a soluciones en los fluidos viscosos compresibles con determinada simetría.

ANEXO

Comprobemos que, efectivamente, el límite de (7) para $\mu \longrightarrow 0$ da (9):

$$\lim_{\mu\to 0} G = \frac{1}{4\pi|x|} \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\pi\mu} \int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{\mu}(1-\cos\varphi)} \cos\left[\frac{2}{\mu}\left(t\cos\frac{\varphi}{2} - |x|\right)\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right] d\varphi \qquad \text{(A)}$$

En la integral en (A) hagamos el cambio de variables: $z = \sqrt{2t}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$.

Obtenemos:

$$I = \frac{1}{\pi\mu}\sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\mu}\left(t\sqrt{1-\frac{z^2}{2t}} - |x|\right)\right] \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{z^2}{2t}}} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi\mu}\sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\mu}\left(t - |x|\right)\right] dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi\mu}\sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \left\{ \frac{\cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\mu}\left(t\sqrt{1-\frac{z^2}{2t}} - |x|\right)\right]}{\sqrt{1-\frac{z^2}{2t}}} - \right.$$

$$\left. - \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\mu}\left(t \quad |x|\right)\right]\right\} dz \equiv I_1 + I_2 .$$

El segundo sumando para $\mu \to 0$, es del orden $O(\sqrt{\mu})$ [5].

Por otra parte, el primer sumando, teniendo en cuenta [6], se puede expresar como:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu t}}\, e^{-\frac{(t-|x|)^2}{2\mu t}} - \frac{1}{\pi\mu}\cdot\sqrt{\frac{2}{t}} \int_{\sqrt{2t}}^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\mu}\left(t - |x|\right)\right] dz \qquad \text{(B)}$$

La integral en (B) tiende a cero para $\mu \to 0$. Por lo tanto, finalmente,

$$\lim_{\mu\to 0} I_1 = \delta(t - |x|) \qquad \text{(C)}$$

Por lo que queda rigurosamente demostrado que para $G(x,t)$ dada por (7):

$$\lim_{\mu\to 0} G(x,t) = \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi\,|x|} \qquad \text{(D)}$$

De esta manera queda establecida, por la fórmula (7), la solución fundamental de la ecuación para las pequeñas oscilaciones de un fluido viscoso compresible, que se reduce a la solución fundamental de la ecuación de D'Alembert, cuando la viscosidad desaparece.

REFERENCIAS

1. Marín Antuña, J., O. Sotolongo Costa (1991). *Sobre una ecuación para las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso compresible.* Revista Cubana de Física, Vol. XI, No. 1.

2. -----. *Ondas en medios viscosos compresibles.* Revista Cubana de Física, 1991 (aceptado para publicar).

3. Landau, L.D., E.M. Lifshits (1988). Hidrodinámica. Serie de Física Teórica. Moscú, Nauka, 1988.

4. Vladimirov, V.S. (1971). Ecuaciones de la Física Matemática, Moscú Nauka.

5. Copson, E.T. (1966). Desarrollos asintóticos. Moscú, Mir.

6. Marín Antuña, J. (1990) Teoría de Funciones de Variable Compleja. La Habana, Pueblo y Educación.

7. ----- (1991). *Oscilaciones no estacionarias en un fluido viscoso compresible para una excitación periódica espacial.* Revista Cubana de Física (aceptado para publicar) Vol. XI, No. 3, 1991.