REVISTA CUBANA DE FÍSICA Vol. 12, No. 1, 1992

OSCILACIONES NO ESTACIONARIAS DE UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE PARA UNA EXCITACION PERIODICA ESPACIAL

José Marín Antuña, Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana.

RESUMEN

Se estudia un problema de frontera que describe una clase de movimientos de un fluido viscoso y compresible bajo la acción de una excitación simétrica periódica espacial. Sobre la base de fórmulas análogas a las fórmulas de Green, se construye la solución de este problema, se estudia el carácter de la solución para viscosidades pequeñas y se investiga su comportamiento para tiempos grandes. Se analiza también el caso de la excitación de longitud de onda corta.

ABSTRACT

The author studies a boundary-value problem wich describes a class of movements of a viscose comprehesible fluid by the action of a symmetric space periodic excitation. In the base of analog of Green's formulae he makes the solution of this problem, studies the character of the solution for small viscosity and his behavior for big time. He also analyses the case of excitation os short wave length.

INTRODUCCIÓN

Los problemas de la dinámica de un fluido viscoso hace tiempo son de gran interés [1], [2]. Una importancia particular tienen los problemas no estacionarios y la investigación del comportamiento asintótico de sus soluciones para tiempos grandes, teniendo en cuenta los efectos de la compresibilidad y de la viscosidad. La idea general sobre el carácter de estos procesos se puede obtener ya dentro de los marcos de un modelo lineal.

En el presente trabajo se estudia un problema de frontera que describe una clase de movimientos de un fluido viscoso y compresible bajo la acción de una excitación simétrica periódica espacial. Sobre la base de fórmulas análogas a las fórmulas de Green, se construye la solución de este problema, se estudia el carácter de la solución para viscosidades pequeñas y se investiga su comportamiento para tiempos grandes. Se analiza también el caso de la excitación de longitud de onda corta.

1. PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

Pasemos al planteamiento del problema. La presión dinámica en un fluido viscoso compresible, que realiza oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio, se describe por la ecuación [3], [4]:

$$\varepsilon^2 u_{tt} - \gamma\nabla^2 u_t - \nabla^2 u = 0 \qquad (1)$$

donde $\gamma = (\xi+4\eta/3)\varepsilon^2\rho^{-1}$ es el parámetro de viscosidad (η es la viscosidad de cizalladura, ξ la viscosidad volumétrica); $\varepsilon = c^{-1}$ (c es la velocidad del sonido), ρ es la densidad del fluido en estado no excitado.

Supongamos que el fluido ocupa el semiespacio $R^3_+ = \{(x,y)\in R^3 : z>0\}$ y que en el instante inicial se encuentra en estado de reposo, es decir

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$$

En la frontera z = 0 está dada una presión dinámica del tipo siguiente:

$$u\big|_{z=0} = f(t)\cos \alpha x$$

donde $\alpha>0$, $f(0) = f'(0) = 0$.

Basados en consideraciones físicas evidentes, en la simetría y la periodicidad de las condiciones iniciales y de frontera, así como en que estas no dependen de la coordenada y, buscaremos la función u(x,y,z,t) en la forma

$$u = v(z,t)\cos \alpha x.$$

Entonces obtenemos para v(z,t) el siguiente problema de frontera unidimensional:

$$L^{\alpha\gamma}_{zt}[v(z,t)] \equiv \varepsilon^2 v_{tt} - \gamma(\partial_z^2-\alpha^2)v_t - (\partial_z^2-\alpha^2)v = 0, \quad z,t > 0 \qquad (2)$$

$$v\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = 0 \qquad (3)$$

$$v\Big|_{z=0} = f(t) \qquad (4)$$

2. *CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN*

Buscaremos la solución del problema (2)-(4) en la clase K de funciones $\psi(z,t)$ que cumplan las siguientes condiciones de suavidad y acotamiento:

1) $\exists\ \dfrac{\partial^{k+m}\psi}{\partial t^k \partial z^m} \in C[(0,\infty)\times(0,\infty)]$

donde $(k,m) \in B^{(2,0)} \cup B^{(1,2)}$;

2) $\dfrac{\partial^{k+m}\psi}{\partial t^k \partial z^m} \in C\left[z\in[0,h];\ L_2(0,T)\right]\ \ \forall h,\ T>0,\ (k,m)\in B^{(1,1)}$

3) $\dfrac{\partial^{k}\psi}{\partial t^k} \in C\left[t\in[0,T];\ L_2(0,h)\right]\ \ \forall h,\ T>0,\ k=0,1$

4) $\left\| \dfrac{\partial^{k+m}\psi}{\partial t^k \partial z^m} \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_T(1+z^{\beta})$ para cierta $\beta>0$, $(k,m)\in B^{(1,1)}$

Aquí se han usado las siguientes notaciones:

$$B^{(k_1,k_2)} \equiv \left\{(s_1,s_2):\ s_i\in\{0,\dots,k_i\},\ i=1,2\right\}$$

$C[\xi\in[\alpha,\beta];H]$ es el espacio de funciones continuas abstractas de la variable ξ con valores en el espacio de Hilbert H.

La expresión $\dfrac{\partial^{k+m}\psi}{\partial t^k \partial z^m}$ supone todas las derivadas cruzadas del tipo indicado. Con respecto a la función $f(t)$ supondremos lo siguiente:

$$f(t)\in C^2[0,\infty),\ f(0)=f'(0)=0$$

Mediante la técnica de la transformada de Fourier y el teorema de Peli-Wienner [5] se puede demostrar que la siguiente función es la solución fundamental del operador $L^{\alpha\gamma}_{zt}$:

$$E^{\alpha\gamma}(z,t) = \frac{\theta(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|z| - \frac{\gamma}{2\varepsilon^2}(k^2+\alpha^2)} \frac{\mathrm{sh}\left\{\dfrac{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}}{2\varepsilon^2}\right\}}{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}}\,dk \qquad (1.1)$$

donde $\mu_{\alpha\gamma}(k) = \gamma^2(k^2+\alpha^2) - 4\varepsilon^2(k^2+\alpha^2)$.

Introduzcamos la notación

$$Q_h^{\sigma\delta}(z,t) \equiv \{(\xi,\tau) \mid \xi \in (\sigma, z-\sigma) \cup (z+\sigma,h),\ \tau \in (\delta, t-\delta)\}$$

$(h>z+\sigma>3\sigma>0;\ 0<2\delta<t)$.

Supongamos que la función $v(z,t) \in K$ es la solución del problema (2) - (4). En las integrales a la izquierda de las desigualdades

$$\int_{Q_h^{\sigma\delta}(z,t)} L_{\xi\tau}^{\alpha\gamma}[v(\xi,\tau)]E^{\alpha\gamma}(z \pm \xi,\ t-\tau)d\xi d\tau = 0$$

realicemos la integración por partes tantas veces como sea necesario para que todas las derivadas que están en $L_{\xi\tau}^{\alpha\gamma}$ pasen a $E^{\alpha\gamma}(z\pm\xi,\ t-\tau)$ y tengamos en cuenta, al hacerlo, que para $(\xi,\tau) \in Q_h^{\sigma\delta}(z,t)$ tienen lugar las igualdades $L_{zt}^{\alpha\gamma}[E^{\alpha\gamma}(z \pm \xi,\ t-\tau)] = 0$ (lo que se comprueba fácilmente de forma directa). Despué de esto, tendamos δ y σ a cero y h a infinito, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y que $v(z,t)$ pertenece a la clase K. Como resultado, se obtienen las siguientes fórmulas de Green del operador $L_{zt}^{\alpha\gamma}$:

$$\frac{1+(-1)^l}{2}\, v(z,t) =$$

$$= -\int_0^t \left\{E^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau}+1\right)v_z(0,\tau) + (-1)^l\, E_z^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau}+1\right)v(0,\tau)\right\}d\tau \tag{1.2}$$

con $l=1,2,\ z,t>0$.

Restando a la fórmula con $l=2$ la correspondiente con $l=1$ y teniendo en cuenta la condición de frontera (3), se obtiene la fórmula:

$$v(z,t) = -2\int_0^t E_z^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau}+1\right)f(\tau)d\tau \tag{1.3}$$

Así pues, si en la clase K existe la solución del problema (2) - (4), esta tiene la forma (1.3). Por otra parte, se puede demostrar que la función (1.3) pertenece a la clase K y satisface el problema (2) - (4). De esta forma, tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 1. La solución del problema (2) - (4) existe y es única en la clase K y viene dada por la fórmula (1.3).

Señalemos que con ayuda de las fórmulas (1.2) es fácil obtener una expresión de la solución construida a través de su derivada respecto a z en z=0.

$$v(z,t) = -2 \int_0^t \mathcal{E}^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left[\gamma\frac{d}{d\tau}+1\right] g(\tau)d\tau$$

donde $g(\tau) \equiv v_z(0,\tau)$.

Estudiemos la conducta de la solución obtenida para valores pequeños del parámetro de viscosidad γ.

Para $\gamma=0$ la ecuación (2) se convierte en la ecuación de Klein-Gordon:

$$L^{\alpha}_{zt}[v(z,t)] \equiv \varepsilon^2 v_{tt} - v_{zz} + \alpha^2 v = 0 \qquad (1.4)$$

cuya solución fundamental "retardada" es la función (ver, por ejemplo, [6]):

$$E^{\alpha}(z,t) = \frac{\theta(t-\varepsilon|z|)}{2\varepsilon} J_o\left(\alpha\sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} - z^2}\right)$$

Supongamos que cierta función $v^o(z,t)$ satisface la ecuación (1.4) en sentido generalizado, tiene derivadas parciales respecto a z y t hasta segundo orden continuas para $z,t>0$ y $z\neq t/\varepsilon$ y acotadas para $z\geq 0$, $t\geq 0$, y tiene los valores iniciales $v^o\big|_{t=0} = v^o_t\big|_{t=0} = 0$. Se puede demostrar que, en en este caso, para la función $v^o(z,t)$ tienen validez las siguientes fórmulas, análogas a (1.2):

$$\frac{1+(-1)^l}{2} v^o(z,t) =$$

$$= -\int_0^{t-\varepsilon z} \left\{E^{\alpha}(z,t-\tau)v^o_z(0,\tau) + (-1)^l E^{\alpha}_z(z,t-\tau)v^o(0,\tau)\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{(-1)^l}{2} v^o(0,t-\varepsilon z) \qquad (1.5)$$

$\forall z,\ t>0,\ l=1,2.$

Aquí se supone que $v^o(z,t) \equiv 0 \quad \forall t<0$.

De (1.5) se desprende que la solución del problema de frontera en la semirrecta para la ecuación (1.4) con condición de Neumann en el extremo y condiciones iniciales nulas viene dada por la función

$$v^o(z,t) = -2\int_0^{t-\varepsilon z} E^{\alpha}(z,t-\tau)g(\tau)d\tau$$

donde $g(\tau) \equiv v^o_z(0,\tau)$.

Tiene lugar el

Teorema 2. Sea $\varphi(\tau)\in C^{(1)}[0,\infty)$, $\varphi(\tau)\equiv 0$ para $\tau\leq 0$. Entonces, para $t>0$ uniformemente respecto a $z\in[0,\infty)$

$$\left| \int_0^t E^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau}+1\right)\varphi(\tau)d\tau - \int_0^{t-\varepsilon z} E^{\alpha}(z,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \right| \longrightarrow 0 \quad \forall\gamma \longrightarrow 0.$$

No presentaremos aquí la demostración de este teorema, señalemos sólo que se demuestra sobre la base de comparar las soluciones fundamentales $E^{\alpha\gamma}(z,t)$ y $E^{\alpha}(z,t)$ para lo cual resulta cómodo expresar la última en la forma

$$E^{\alpha}(z,t) = \frac{\theta(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|z|}}{2\varepsilon\sqrt{k^2+\alpha^2}} \operatorname{sen}\left\{\frac{\sqrt{k^2+\alpha^2}}{\varepsilon}\,t\right\} dk$$

Como conclusión de este epígrafe, analicemos el aspecto físico de los resultados obtenidos. De ellos se desprende que en presencia de viscosidad ($\gamma\neq 0$), a pesar de la suposición de que el fluido es compresible, la velocidad de propagación de la excitación en el medio descrito por la ecuación (1), en general, es infinita. Esto está relacionado con el hecho de que para $\gamma\neq 0$ la ecuación (1) no es hiperbólica, como ocurre en ausencia de viscosidad y, como consecuencia de ello, $E^{\alpha\gamma}(z,t)$ no se hace idénticamente nula para $|z|>t/\varepsilon$, sino que sólo tiende exponencialmente a cero al crecer $|z|$ para un $t>0$ fijo. Sin embargo, como se desprende del teorema 2, para pequeñas γ en el proceso ondulatorio descrito existe un análogo de frente acústico que se propaga con la velocidad del sonido $c=1/\varepsilon$, el cual tiene delante de sí una especie de cola anterior exponencialmente decreciente que lo anuncia.

3. *COMPORTAMIENTO PARA TIEMPOS GRANDES*

Realizaremos el estudio de la solución para $t \longrightarrow \infty$, siguiendo a [7], para los casos de $f(t)$ que tengan soporte compacto; es decir, $f(t)\equiv 0$ para t mayores que cierto T y $f(t) = \eta(t)fe^{i\omega t}$, donde $\eta(t) \equiv 1$ para t mayores que cierta T y $\eta(0) = \eta'(0) = 0$. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1. $E_z^{\alpha\gamma}(z,t) \longrightarrow 0$ $\forall t \longrightarrow \infty$ uniformemente para $z \in (0,\infty)$.

La demostración de este lema se puede efectuar basándose directamente en la expresión (1.1) y no la exponemos aquí.

Observación 1. El resultado del lema 1 se puede precisar. Como indica un análisis más detallado de la expresión (1.1) para $E_z^{\alpha\gamma}(z,t)$, si se cumplen las condiciones $t>t_o>0$, $4\varepsilon^2-\alpha^2\gamma^2 \geq h^2>0$, tiene lugar:

$$\left|E_z^{\alpha\gamma}(z,t)\right| \leq \frac{1}{\gamma}\, e^{-\gamma\frac{\alpha^2 t}{2\varepsilon^2}} + C_{ht_o}\,\frac{t^{1/4}\,e^{-t/\varepsilon}}{\gamma^{3/4}} \qquad (2.1)$$

donde C_{ht_o} es una constante que depende sólo de h y t_o.

Esta valoración muestra que en el caso de valores pequeños del parámetro de viscosidad γ $\left(\frac{1}{\gamma} >> \frac{\gamma\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)$ el comportamiento de $E_z^{\alpha\gamma}(z,t)$ para $t \to \infty$ se determina, fundamentalmente, por el primer sumando de la igualdad (2.1). Partiendo de esto, se puede introducir el tiempo característico de *amortiguamiento* $\theta_0 = \frac{2\varepsilon^2}{\gamma\alpha^2}$ igual al inverso del coeficiente que acompaña al tiempo t en el exponente del sumando.

Observación 2. Del lema 1 se desprende que para cualquier $F(\tau) \in C[0,T]$, la integral del tipo

$$I_F(z,t) = \int_0^T E_z^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)F(\tau)d\tau, \quad T>0 \tag{2.2}$$

tiende a cero para $t \to \infty$ uniformemente para $z\in(0,\infty)$.

Supongamos que f(t) en la condición de frontera (3) tiene soporte compacto; es decir, $f(t)\equiv 0$ para $t\geq T>0$. En este caso, para tiempos $t>T$, la solución $v(z,t)$ se expresa en la forma (2.2) con

$$F(\tau) = -2\left(\gamma\frac{d}{d\tau} + 1\right)f(\tau)$$

Por esto, en virtud de la observación 2, llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3. Si la función f(t) en la condición de frontera (3) tiene soporte compacto, la solución v(z,t) tiende a cero para $t \to \infty$ uniformemente para $z\in(0,\infty)$.

Supongamos ahora que f(t) tiene la forma:

$$f(t) = \eta(t)\ fe^{i\omega t}$$

donde $\eta(t)\equiv 1$ $\forall t\geq T>0$ y $\eta(0)= \eta'(0)=0$. Expresemos esta función en la forma

$$f(t) = (\eta(t) - 1)\ fe^{i\omega t} + fe^{i\omega t}$$

y coloquémosla en (1.3). Para $t>T$ tenemos

$$v(z,t) = -2\int_0^T E_z^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau} + 1\right)\left[\eta(\tau)-1\right]f\ e^{i\omega\tau}\ d\tau\ -$$

$$-2\ f\ (1 + i\omega)\ e^{i\omega t}\int_0^t E_z^{\alpha\gamma}\ (z,\tau)\ e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{2.3}$$

El primer sumando a la derecha en (2.3), en virtud de la observación 2, tiende a cero para $t \to \infty$, mientras que la integral en el segundo sumando para $t \to \infty$ tiende a la transformada de Fourier respecto a τ de la función $E_z^{\alpha\gamma}(z,\tau)$. Así pues, llegamos a la igualdad:

$$\lim_{t\to\infty} \left[v(z,t) e^{-i\omega t} \right] = -2\ (t + i\omega)\ f\ F_{\tau\to\omega} \left[E_z^{\alpha\gamma}(z,\tau) \right] \equiv A_\omega(z) \qquad (2.4)$$

Después de realizar cálculos sencillos, obtenemos que $A_\omega(z)$ tiene la forma:

$$A_\omega(z) = f\ e^{\beta(\omega) z} \qquad (2.5)$$

donde

$$\beta(\omega) = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\alpha^2\gamma^2\omega^2+\varepsilon^2\omega^2) - i\varepsilon^2\omega^3\gamma}}{\sqrt{1+\gamma^2\omega^2}}$$

aquí

$$\sqrt{k} = \sqrt{|k|}\ e^{i\frac{1}{2}\arg k}, \qquad \arg k \in [0,2\pi).$$

Es fácil ver que $\mathrm{Re}\ \beta(\omega)<0$ para $\gamma\neq 0$ y, por tanto, para viscosidad no nula las ondas no se propagan hacia adentro del fluido.

Mediante comprobación directa es fácil comprobar que $A_\omega(z)$, que comúnmente se llama amplitud límite, satisface la ecuación de las oscilaciones estabilizadas para la ecuación (2), es decir

$$L_z^\omega \left[A_\omega(z) \right] \equiv \left\{ e^{-i\omega t}\ L_{zt}^{\alpha\gamma} \left[A_\omega(z)\ e^{i\omega t} \right] \right\} = 0 \qquad (2.6)$$

Formulemos estos resultados en forma de teorema:

Teorema 4. Si $f(t) = \eta(t) f e^{i\omega t}$, donde $\eta(t) \in C^{(2)}[0,\infty)$, $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ y $\eta(t) \equiv 1\ \ \forall t>T$, la solución del problema (2)-(4) tiene amplitud límite $A_\omega(z)$ expresada por la fórmula (2.5) y que satisface la ecuación de las oscilaciones estabilizadas (2.6).

4. *EXCITACIÓN DE LONGITUD DE ONDA CORTA*

En este epígrafe se deducen fórmulas asintóticas para la solución del problema (2) - (4) para $\alpha \longrightarrow \infty$, caso que físicamente responde a una excitación de onda corta.

Usando el desarrollo de Taylor es fácil comprobar la validez de la siguiente expresión para α grande:

$$e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon^2}(k^2+\alpha^2)} \left| \frac{\mathrm{sh}\left\{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}\, t\right\}}{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}} - \frac{\mathrm{sh}\left\{\left(\gamma\frac{k^2+\alpha^2}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\gamma}\right)t\right\}}{\gamma\ \frac{k^2+\alpha^2}{2\varepsilon^2}} \right| \leq \frac{C_T}{(k^2+\alpha^2)^2}$$

donde $t\in[0,T]$ y C_T es cierta constante que depende sólo de T; k es un número real. De aquí se obtiene la valoración uniforme respecto a z siguiente:

$$\left|E_z^{\alpha\gamma}(z^{*},t) - Q^{\alpha\gamma}(z,t)\right| \le \frac{K_T}{\alpha^2}$$

donde $z>0$, $t\in[0,T]$, y

$$Q^{\alpha\gamma}(z,t) = \frac{1}{2\gamma}\, e^{-\alpha z-\frac{t}{\gamma}} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\gamma(k^2+\alpha^2)} \exp\left\{ikz - \frac{\gamma(k^2+\alpha^2)t}{\varepsilon^2} + \frac{t}{\gamma}\right\}dk \qquad (3.1)$$

K_T es una constante que depende sólo de T.

Por consiguiente, para la solución $v(z,t)$ se obtiene que

$$\left|v(z,t) - q(z,t)\right| < \frac{2K_T T}{\alpha^2}$$

donde

$$q(z,t) = -2\int_0^t Q^{\alpha\gamma}(z,t-\tau)\left(\gamma\frac{d}{d\tau} + 1\right)f(\tau)\,d\tau \qquad (3.2)$$

La expresión explícita de $Q^{\alpha\gamma}(z,t)$ permite obtener fórmulas para $q(z,t)$ en forma de integrales simples:

$$q(z,t) = -2\,\frac{e^{-\alpha z}}{\gamma}\int_0^t \left(\gamma\frac{d}{d\tau} + 1\right)f(\tau)\,\mathrm{sh}\left\{\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau +$$

$$+ \frac{z\varepsilon\, e^{\frac{t}{\gamma}}}{2\gamma\sqrt{\pi\gamma}}\int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{z^2\varepsilon}{4\gamma(t-\tau)} - \gamma\,\frac{\alpha^2(t-\tau)}{\varepsilon^2}\right\}dt$$

Aquí:

$$g(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\gamma}}f(\tau) + 2\int_0^\tau e^{-\frac{\theta}{\gamma}}f(\theta)\,d\theta.$$

Así pues, la función $q(z,t)$ coincide con la solución $v(z,t)$ con exactitud de sumandos del orden $O(\alpha^{-2})$. Por comprobación directa puede verse que $q(z,t)$ satisface la condición de frontera (3), las condiciones iniciales (4) y también la ecuación (2) con exactitud de hasta términos del orden $O(\alpha^{o})$.

Si $f(t)$ tiene soporte compacto, es decir, $f(t)\equiv 0$ $\forall t\ge T_o$, para la función $q(z,t)$ de (3.1) y (3.2) se puede obtener la valoración:

$$|q(z,t)| \le C_f\,\frac{\exp\left\{-\left(t-T_o\right)\left(\frac{\alpha^2\gamma}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\gamma}\right)\right\}}{\left(t-T_o\right)^{\frac{\alpha^2\gamma}{\varepsilon^2}}} \quad \forall t\ge T_o$$

donde C_f es una constante que sólo depende de f(t). De esta valoración se ve que para $\frac{\alpha^2\gamma}{\varepsilon^2} >> \frac{1}{\gamma}$ el término principal de la asíntota después de terminar la acción de la excitación toma valores apreciables sólo para tiempos no mayores en orden que la magnitud $\theta_1 = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2\gamma}$.

Destaquemos que θ_1 para su forma es cercano al tiempo característico de amortiguamiento θ_0 obtenido para otra relación de los parámetros físicos correspondientes.

REFERENCIAS

1. Sliozin, N.A. (1955). *Dinámica de un líquido viscoso imcompresible.* Moscú, GITTI.
2. Landau, L.D. y E.M. Lifshits (1988). *Hidrodinámica.* Moscú, Nauka.
3. Shatov, A.K. (1985). *Sobre el problema de Cauchy para el sistema linealizado de ecuaciones de Navier-Stokes considerando la compresibilidad.* Doklady AN SSSR, T. 285, No. 6, 1374-1376.
4. Marín Antuña, J. y O. Sotolongo Costa (1991). *Sobre una ecuación para oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso y compresible.* Revista Cubana de Física, Vol. XI, No. 3.
5. Hermander, L. (1965). *Operadores lineales diferenciales en derivadas parciales.* Moscú, Mir.
6. Komech, A.I. (1988). *Ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes.* Problemas Contemporáneos de Matemática. Direcciones Fundamentales. Tomo 31. (Resultados de Ciencia y Técnica. Biblioteca Central de la AC URSS). Moscú, 127-261.
7. Gabov, S.A.; B.B. Orazov y A.G. Sviéshnikov (1986). *Sobre la teoría no estacionaria de ondas internas.* Zhurnal Vichis. Matem. y Matem. Fiziki, T. 26, No. 8, 1223.