ONDAS PLANAS DE AMPLITUD VARIABLE EN LIQUIDOS GIRATORIOS COMPRESIBLES. PROBLEMA DE AUTOVALORES

José Marín Antuña, Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana.

RESUMEN

En este artículo se continúan las investigaciones referidas a los procesos oscilatorios en líquidos giratorios y compresibles. Se estudian las relaciones de dispersión de las ondas planas en el líquido y se analiza el problema de autovalores que surge como consecuencia de la propagación de una onda plana de amplitud variable a lo largo de una guía de ondas planas de paredes rígidas sumergida en el líquido. Se ofrecen los resultados en forma analítica y se hace un análisis breve de los mismos.

ABSTRACT

In this paper the research of oscilations in a giratory compressible liquid is continued. We study dispersion relations of plane waves in the liquid and we analize the eigenvalue problem, wich appears like a consecuence of the propagation of a plane wave with variable amplitude in a plane wave guide of rigid wall in the liquid. We give the analitic form of the results and analize brevly.

I N T R O D U C C I Ó N

En el estudio de los modelos asociados a la propagación de ondas en líquidos giratorios y compresibles que venimos efectuando en varios trabajos [1, 2, 3] tiene indudable importancia la investigación de las relaciones de dispersión en tal líquido y el problema de autovalores que se produce como resultado del análisis de la propagación de ondas planas de amplitud variable en una guía de ondas planas de paredes rígidas sumergida en el líquido mencionado. Los resultados que a continuación se exponen han sido obtenidos como consecuencia de dicha investigación.

1. RELACIONES DE DISPERSIÓN

Analicemos un líquido giratorio y compresible que gira con velocidad angular $\alpha/2$ alrededor de un eje vertical. Referiremos los movimientos bidimensionales del líquido al sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_3) con eje Ox_3 en la dirección del vector $\vec{\alpha}$. En este caso [1] la ecuación que describe las oscilaciones pequeñas (la velocidad del sonido es considerada igual a uno) es:

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_2^2\, u + \alpha^2\, u\right] - \alpha^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \qquad (1)$$

donde $u(x_1, x_3, t)$ tiene el sentido físico de la presión dinámica del líquido o de las componentes del vector de velocidades de las partículas del líquido y

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Supongamos que en el líquido se mueve una onda del tipo

$$u(x_1, x_3, t) = u_0(x_3)\, e^{i(k_1 x_1 - \gamma t)}, \quad \gamma > \alpha \qquad (2)$$

donde k_1 es el número de onda en la dirección Ox_1 y γ es la frecuencia de la onda. La condición $\gamma > \alpha$ es indispensable para garantizar la propagación de la onda en la dirección Ox_1[2]. En otras palabras, supongamos que en el líquido a lo largo del eje Ox_1 se mueve una onda plana armónica con amplitud $u_0(x_3)$ que depende de la coordenada x_3. La ecuación (1) nos permite hallar para la amplitud $u_0(x_3)$ la expresión:

$$(\gamma^2 - \alpha^2)\, u_{0_{x_3 x_3}} + \gamma^2\, (\gamma^2 - \alpha^2 - k_1^2)\, u_0 = 0, \qquad (3)$$

cuyas soluciones linealmente independientes son:

$$u_{0_1}(x_3) = e^{i\gamma x_3\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma^2-\alpha^2}}}, \quad u_{0_2}(x_3) = e^{-i\gamma x_3\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma^2-\alpha^2}}} \qquad (4)$$

Un análisis nos permite afirmar que en el caso en que

$$-\sqrt{\gamma^2-\alpha^2} < k_1 < \sqrt{\gamma^2-\alpha^2} \qquad (5)$$

la expresión (4) de las amplitudes de la onda (2) son magnitudes acotadas oscilantes. Este es el caso de mayor interés físico; el caso $|K_1| > \sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ da amplitudes exponenciales reales, y aunque matemáticamente son posibles no tienen interés desde el punto de vista físico por no dar ondas que se progaguen y no lo consideraremos en lo adelante.

Por consiguiente tendremos

$$u_0(x_3) = e^{\pm i k_3 x_3} \qquad (6)$$

donde

$$k_3 = \gamma\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma^2-\alpha^2}} \qquad (7)$$

es el número de onda en la dirección Ox_3. De (7) es fácil obtener

$$\gamma^2(\gamma^2-\alpha^2)-\gamma^2k^2+\alpha^2k^2\cos^2\theta = 0 \qquad (8)$$

donde $k^2 = k_1^2 + k_3^2$ y θ es el ángulo que forma el vector de onda $\vec{k}$ con el eje Ox_3 de rotación líquido.

La relación de dispersión (8) fue obtenida y analizada en [3]. Aquí nos dedicaremos al estudio de las características de la función de amplitud $u_0(x_3)$ cuando la onda (2) se propaga no en todo el espacio R^2, sino en una franja dentro del líquido analizado.

2. PROBLEMA DE AUTOVALORES

Supongamos que en líquido descrito en el punto anterior se encuentran sumergidas dos placas rígidas infinitas, perpendiculares ambas al eje Ox_3, a la distancia l entre sí y descritas por las ecuaciones $x_3 = 0$, $x_3 = 1$. Estas placas conforman una guía de ondas bidimensionales en nuestro líquido.

Investigaremos la propagación de ondas del tipo (2) en dicha guía. En otras palabras, considerando que u tiene el sentido físico de la componente en el eje Ox_3 del vector de velocidades de las partículas del líquido, el problema se reduce a hallar las soluciones de

$$\left\{\begin{array}{l} u_{0_{x_3x_3}} + \gamma^2 \left[1 - \dfrac{k_1^2}{\gamma^2-\alpha^2} \right] u_0 = 0 \quad \forall\ 0 < x_3 < l,\ \gamma > \alpha, \\ \\ u_0\Big|_{x_3=0} = u_0\Big|_{x_3=l} = 0, \end{array}\right. \tag{9}$$

bajo la condición de que se cumple (5). En este caso las autofunciones del problema (9) son

$$u_{0_n}(x_3) = \operatorname{sen}\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}} \right] \tag{10}$$

donde los autovalores son todos reales y vienen dados por la expresión:

$$\gamma_n = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \alpha^2 + k_1^2\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \alpha^2 + k_1^2\right]^2 - 4\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2}} \tag{11}$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nótese que para el líquido en reposo ($\alpha = 0$) la fórmula (11) da los autovalores conocidos del problema de frontera de la onda armónica (2) entre dos placas rígidas. Igualmente, en el límite para $k_1 \to 0$ (onda estacionaria) se obtiene que $\gamma_n = (\frac{n\pi}{l})$ para toda α. Por otra parte, a medida que l crece el espectro de autovalores se va convirtiendo en continuo y en el límite para $l \to \infty$ se obtiene $\gamma^2 = \alpha^2 + {}^2$.

La condición (5) teniendo en cuenta (11) nos permite afirmar que debe cumplirse que

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \alpha^2 + k_1^2\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \alpha^2 + k_1^2\right]^2 - 4\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2} > \alpha^2 + k_1^2 \tag{12}$$

de donde concluimos que

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k_1^2 > 0 \tag{13}$$

que siempre se cumple para $n > 0$. Por consiguiente, en la guía de ondas analizadas se propagan todos los armónicos.

A partir de la solución obtenida y teniendo en cuenta la relación entre la presión dinámica y las componentes del vector de velocidades de las partículas del líquido [1, 2, 3], para estas magnitudes en la guía de onda se obtienen las siguientes expresiones:

$$p = \frac{ie^{i(k_1x_1-\gamma_n t)}}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \cos\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] + p_o \tag{14}$$

$$v_{x_1} = -\frac{1}{ik_1} \frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \left[2-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}\right] e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \cos\left[\gamma_n x_3\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{15}$$

$$v_{x_2} = \frac{\alpha}{k_1\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \left[2-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}\right] e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \cos\left[\gamma_n x_3\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{16}$$

$$v_{x_3} = e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \operatorname{sen}\left[\gamma_n x_3\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{17}$$

donde p_o tiene el sentido físico del valor no perturbado de la presión en el líquido.

3. ONDAS ESTABILIZADAS

Por último, hagamos notar que las amplitudes de la componente x_3 del vector de velocidades de las partículas del líquido satisfacen la ecuación de las ondas estabilizadas.

$$\gamma v_{x_1x_1} + (\gamma^2 - \alpha^2)\, v_{x_3x_3} + \gamma^2 (\gamma^2 - \alpha^2)\, V = 0 \tag{18}$$

que se obtiene de (1) mediante la operación

$$\lim_{t\to\infty} e^{-i\gamma t} L \left[e^{i\gamma t} v\right]$$

que siempre se cumple para $n > 0$. Por consiguiente, en la guía de ondas analizadas se propagan todos los armónicos.

A partir de la solución obtenida y teniendo en cuenta la relación entre la presión dinámica y las componentes del vector de velocidades de las partículas del líquido [1, 2, 3], para estas magnitudes en la guía de onda se obtienen las siguientes expresiones:

$$p = \frac{ie^{i(k_1x_1-\gamma_n t)}}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \cos\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] + p_o \tag{14}$$

$$v_{x_1} = -\frac{1}{ik_1} \frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \left[2-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}\right] e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \cos\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{15}$$

$$v_{x_2} = \frac{\alpha}{k_1\sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}} \left[2-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}\right] e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \cos\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{16}$$

$$v_{x_3} = e^{i(k_1x_1-\gamma_n t)} \operatorname{sen}\left[\gamma_n x_3 \sqrt{1-\frac{k_1^2}{\gamma_n^2-\alpha^2}}\right] \tag{17}$$

donde p_o tiene el sentido físico del valor no perturbado de la presión en el líquido.

3. ONDAS ESTABILIZADAS

Por último, hagamos notar que las amplitudes de la componente x_3 del vector de velocidades de las partículas del líquido satisfacen la ecuación de las ondas estabilizadas.

$$\gamma v_{x_1x_1} + (\gamma^2 - \alpha^2)\, v_{x_3x_3} + \gamma^2 (\gamma^2 - \alpha^2)\, V = 0 \tag{18}$$

que se obtiene de (1) mediante la operación

$$\lim_{t\to\infty} e^{-i\gamma t}\, L\left[e^{i\gamma t} v\right]$$

La ecuación (18) para el caso $\gamma > \alpha$ que nos ocupa en las dos primeras secciones del presente artículo, es una ecuación de tipo elíptico cuyas soluciones son ondas que se propagan en todas las direcciones del espacio R^2, lo que está en plena concordancia con la teoría conocida de las ecuaciones elípticas de Helmholtz. Sin embargo, para el caso $\gamma < \alpha$, la ecuación (18) es una ecuación hiperbólica (del tipo de Klein-Gordon), cuyo estudio sistemático ha sido comenzado recientemente [6 - 9]. Las características de la ecuación (18) son las rectas.

$$x_3 \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}{\gamma} x_1 = 0 \tag{19}$$

las cuales definen el cono característico

$$|x_3| > \frac{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}{\gamma} |x_1| \tag{20}$$

dentro del cual las ondas se propagan, en tanto que fuera de dicho cono tienen el carácter de ondas estacionarias que se amortiguan para

$\sqrt{x_1^2 + x_3^2} \longrightarrow \infty$.

REFERENCIAS

1. MARIN ANTUÑA, J. (1984): "Sobre una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible", Revista Cubana de Física, IV(3): 63-75.

2. ---------------- (1985): "Sobre la excitación de ondas en un líquido giratorio y compresible", Revista de Ciencias Matemáticas, VI(1): 105-114.

3. ---------------- (1987): "Ondas planas y relaciones de dispersión en líquidos giratorios y compresibles", Revista Cubana de Física, VII(1).

4. TIJONOV, A.N.; A.A. SAMARSKY (1977): "Ecuaciones de la Física Matemática", Nauka, Moscú.

5. MADELUNG, E. (1957): El Aparato Matemático de la Física, Berlín.

6. GABOV, S.A. (1982): Difracción de ondas internas descritas por la ecuación de Klein-Gordon en un semiplano, Doklady Akad CCCP, T. 264, No. 73-75.

7. ----------- (1982): Sobre un problema de difracción de ondas descritas por la ecuación de Klein-Gordon, Zhunal Vichis. mat. y matem. fiziki, T. 22, No. 6, 1518.

8. GABOV, S.A.; A.G. SVIESHNIKOV; A.K. SHATOV (1983): Dispersión de ondas descritas por la ecuación de Klein-Gordon por un plano indicado, Doklady Akad. Nauk CCCP, T. 268, No. 5, 1098.

9. MARIN ANTUÑA, J. (1985): Disertación para la obtención del grado científico de candidato en ciencias físico-matemáticas, Facultad de Física, Universidad Estatal de Moscú.