# LA EXPANSION LIBRE DE UNA DISTRIBUCION ESFERICA DE PARTICULAS COMO UN PROBLEMA DE DOS CUERPOS

M.A.H. García Díaz, Departamento de Física, I.S.P.E.T.P.

RESUMEN

Se estudia la expansión libre de una distribución esférica de partículas que, según el caso, interactúan gravitacional o eléctricamente. El procedimiento empleado, consistente en dividir virtualmente al sistema en dos hemisferios, simplifica el planteamiento a un problema de dos cuerpos. Esto permite describir analíticamente el movimiento expansivo y, a su vez, contribuye a establecer como una ley de la inversa del cuadrado de la distancia, las fuerzas atractivas o repulsivas que los hemisferios ejercen entre sí.

ABSTRACT

Free expansion in a spherical distribution of particles is studied. Gravitational or electrical field in the system is considered. The applied procedure simplifies the question to a two-body problem, since the system is virtually divided in two hemispheres. This allows the analytical description of the expansive motion and, in turn, it contributes to found, as an inverse-square law, the attractive or repulsive forces exerted between the hemispheres.

# INTRODUCCIÓN

Las investigaciones realizadas en torno al problema del movimiento de N cuerpos -que se atraen o se repelen según la ley de la inversa del cuadrado de la distancia- se clasifican /1/ en dos grandes grupos. Uno, que ha tratado de resolver el problema analítico y otro, que a falta de una solución analítica satisfactoria se contenta con obtener resultados numéricos aceptables. Es incalculable el número de modalidades en que puede aparecer el famoso problema. Una de ellas lo constituye el movimiento de expansión de un sistema de partículas -idénticas por sus propiedades físicas- que presenta simetría esférica, o sea, una esfera de gas, de cuyo estudio por primera vez se ocupó Emden /2/. Si este gas es ideal se admite que el campo macroscópico asociado a las cargas de las partículas no afecta sus propiedades /3/. Cuando dicho campo de fuerzas puede despreciarse el problema se simplifica notoriamente, y su solución /4/ se halla mediante la división virtual del sistema en dos subsistemas, en forma de hemisferios. La idea de este procedimiento no es nueva, aunque su explotación ha sido insuficiente. En su forma más elemental Newton lo emplea en su Principia Mathematica /5/ para apoyar la validez de la última de las tres célebres leyes de su mecánica, pero su verdadero origen se remonta a los tiempos en que Arquímedes estudiaba el centro de gravedad de los cuerpos rígidos /6/, y su complejidad se acrecienta cuando se pretenden formular las fuerzas de interacción de los subsistemas. Así, al considerar la fuerza de atracción (si el campo macroscópico es de carácter gravitacional) o de repulsión (si es de carácter eléctrico) entre los subsistemas de una distribución esférica de partículas, surge un gran inconveniente: se desconoce el aspecto cuantitativo de las respectivas leyes de interacción, es decir, nada se sabe de las expresiones analíticas que les corresponden. De hecho hay que olvidarse en deducirla directamente, porque, como algunos expresan /7/, la tarea de calcular la fuerza gravitacional entre masas extendidas (válido para las cargas eléctricas) es matemáticamente tan complicada que sólo en muy contados casos se logra el resultado final; pese a que últimamente, aplicando el concepto de masa negativa /8/, se ha incrementado su número. No obstante, como se comprenderá, esta vía es, por su propia índole, incapaz de dar la respuesta que se requiere. Ante esta situación hay que optar por la siguiente alternativa: asumir, por razones de simetría y dimensionalidad, que las fuerzas atractivas -o repulsivas, según el caso- entre los hemisferios se rige por una expresión formalmente análoga a la de la Ley de la Gravitación Universal de Newton. Luego esta hipótesis se pone a prueba haciendo que, en vez de objetivo, el problema fundamental de la mecánica se convierta en medio de precisar la expresión supuesta. Sin embargo, este papel poco usual que desempeña el problema fundamental de la mecánica no es óbice para que, a renglón seguido, se arribe a la ecuación del movimiento de expansión del sistema. Para ello, como en /4/, se admitirá que la distribución espacial de las partículas, en cualquier instante, es uniforme; con lo cual no sólo se gana en sencillez, sino que, además, se garantiza la estabilidad de las formas matemáticas de las leyes de interacción durante la expansión.

## CASO GRAVITACIONAL

*I. Método Energético.*

Imaginemos una distribución esférica de partículas, de radio R, como un gas ideal monoatómico no degenerado y consideremos la presencia del campo gravitacional asociado a la masa M del mismo; cuya energía interna, a fin de asegurar su expansión libre ilimitada, convendremos que no es negativa, mientras su densidad de masa es uniforme. Seleccionemos el sistema inercial de referencia (S.I.R.) con su origen, 0, en el centro de masa (C.M.) de la esfera gaseosa (ver Figura). Supongamos que a partir del estado inicial ($R = R_0$) el sistema se expande, manteniéndose uniforme su densidad de masa. La energía interna del sistema viene dada por

$$E = M\bar{V}_0^2 / 2 - 3GM^2 / 5R_0 \tag{1}$$

donde $\sqrt{\bar{V}_0^2}$ es la velocidad cuadrática media cuando $R = R_0$, y G la constante de gravitación universal. Fijemos la atención en los subsistemas, de forma hemisférica, en que el plano YZ divide al gas. Sobre cada subsistema actuará, como consecuencia de la transferencia de momento lineal entre los mismos /4/, la fuerza de intercambio

$$F = \bar{V}^2 / 4R \tag{2}$$

donde $\sqrt{\bar{V}^2}$ es la velocidad cuadrática media del movimiento caótico de las partículas cuando el radio de la distribución es R. Además, actuará la fuerza atractiva F' que la masa, M/2, del subsistema contiguo ejerce sobre la masa, M/2, del subsistema objeto de estudio; y, como el eje X coincide con las directrices de F y F', en todo momento, prescindiremos de la notación vectorial. Si S es la distancia entre los C.M. de los subsistemas, asumiremos que los dos hemisferios se atraen como si sus masas estuvieran concentradas en sus respectivos centros de masa. En términos matemáticos

$$F' = H.\left(\frac{M}{2}\right) . \left(\frac{M}{2}\right) / S^2$$

siendo H el coeficiente de proporcionalidad, con las mismas dimensiones que G, pero cuyo valor no es desconocido. Por conveniencia estableceremos la siguiente relación: H = KG, donde K es una constante a determinar. De esta manera

$$F' = K \left[G.\left(\frac{M}{2}\right) . \left(\frac{M}{2}\right) / S^2\right] \tag{3}$$

de modo que la energía potencial gravitacional de los subsistemas, U', obviamente, es

$$U' = -K\left[G.\left(\frac{M}{2}\right) . \left(\frac{M}{2}\right) / S\right] \tag{4}$$

en tanto la energía potencial, U, asociada a las fuerzas de intercambio, como ya se demostró /4/, viene dada por

$$U = (15/128)\ M\overline{V}_0^2 . (R_0/R)^{8/5} \tag{5}$$

Ahora bien, como la energía total de interacción de los subsistemas es, indefectiblemente, una fracción de la energía interna, la ley de conservación de la energía mecánica permite escribir

$$U + U' + MU^2 / 2 = \alpha E \tag{6}$$

donde, por lo dicho, $\alpha$ representa a un factor numérico positivo e inferior a la unidad; en tanto $u = 3V_R/8$ (7) denota el valor de la velocidad de los C.M. de ambos subsistemas, mientras $V_R$ es la velocidad de la superficie exterior del sistema. Ya que $S = 3R/4$ (8) y para $R = R_0$ se tiene que $u = 0$, de (6), y teniendo en cuenta (4) y (5), resulta

$$(15/128)\ M\overline{V}_0^2 - KGM^2/3R_0 = \alpha E$$

Sustituyendo, con el auxilio de (1), queda

$$\left(\frac{15}{64} - \alpha\right)E + \left(\frac{9}{64} - \frac{K}{3}\right) . \frac{GM^2}{R_0} = 0$$

Haciendo $E = 0$ se tiene $K = 27/64$ (9), y como la expresión anterior es válida cuando $E > 0$, se tiene $\alpha = 15/64$ (10). Así, si volvemos a (6) y sustituimos con arreglo a (4), (5), (7), (8), (9) y (10), resulta

$$V_R = \left\{\frac{5}{3}\ \overline{V}_0^2 \left[1-(R_0/R)^{8/5}\right] + 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

de modo que

$$V_{R_{max}} = \lim_{R\to\infty} V_R = \left(\frac{5}{3}\ \overline{V}_0^2 - \frac{2GM}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

y como la energía cinética de expansión /4/ viene dada por

$$E' = 3MV_R^2 / 10 \tag{13}$$

su valor máximo, de acuerdo con (12) y (1), es $E'_{max} = E$ (14)

*II. Estado Estacionario.*

Considerando que la energía potencial total de interacción de los subsistemas viene dada por $E_{pi} = U + U'$ (15), desde el punto de vista energético, el sistema se encuentra en estado estacionario cuando $E_{pi}$ sea un mínimo. Luego, derivando en (15) con respecto a S y teniendo en cuenta (2), (3), (4), (5) y (8) resulta que $F = F'$. Ahora, según (2), (3), (8) y (9), tenemos $E_{co}/E_{po} = -5/8$ (16), donde $E_{co} = MV_0/2$ y $E_{po} = 3GM/5R_0$. De (1) se sigue que $E = -9GM/40R_0$. (17)

CASO ELÉCTRICO

Consideremos una distribución esférica de partículas que tienen la misma carga eléctrica y la misma masa -despreciable por su acción gravitacional- de modo que, si inicialmente las partículas están en reposo, la energía interna del sistema es $E = 3kQ^2 / 5R_0$ (18), donde k es el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Coulomb, Q es la carga del sistema y $R_0$ su radio inicial. Si en cierto instante las partículas electrizadas se liberan, dada la simetría del sistema, se moverán radialmente, produciéndose la expansión. Sea esta libre y $V_R$ -cuyo valor depende de E- relativamente pequeña, a fin de despreciar los efectos relativistas. Empleando el procedimiento de los subsistemas y admitiendo que la densidad de carga y, por consiguiente, la densidad de masa se mantiene uniforme, la fuerza repulsiva entre los subsistemas puede ser escrita de la manera siguiente

$$F_e = Ck\ (Q/2)\ (Q/2)\ /\ S^2 \qquad (19)$$

donde C es una constante adimensional. Desde el S.I.R., cuyo origen nuevamente coincide con el C.M. del sistema, tenemos $F_e = (M/2)\ du/dt$. Integrando, después de sustituir según (19), (7) y (8), podemos escribir

$$V^2_{R\ max} = 128\ CkQ^2\ /\ 27\ MR_0$$

y sustituyendo en (13) queda

$$E'_{max} = 64\ CkQ^2\ /\ 45\ R_0 \qquad (20)$$

Por otra parte, como la relación carga-masa es la misma para todas las partículas, dada la simetría del sistema, durante la expansión éste no radia /9/; por lo cual $E'_{max} = E$. Sustituyendo en la igualdad anterior, con arreglo a (18) y (20), resulta $C = 27/64$.

DISCUSIÓN

Si el campo gravitacional del sistema de partículas neutras es despreciable, entonces, como caso particular /4/, la ecuación $V_R$ se reduce al primer término, entre llaves, del miembro derecho de (11). En cambio, si $\overline{V_0^2} = 0$, $V_R$ viene dada por el segundo término, entre llaves, del miembro derecho de (11); aunque para que tenga sentido físico debe cumplirse que $R \leq R_o$. Esto significa que la distribución esférica de partículas, inicialmente estáticas, se contrae, transformando progresivamente la energía potencial gravitacional en energía cinética. Prueba de ello es que, con el auxilio de (13) y la fórmula de la energía potencial gravitacional de la esfera de densidad de masa uniforme, la ley de conservación de la energía mecánica conduce también, en este caso, a la ecuación de $V_R$. Adviértase que el resultado expresado analíticamente en (14) es, en rigor, consecuente con dicha ley, y (10) implica que la energía total de interacción de los subsistemas es, aproximadamente, igual a la cuarta parte de la energía interna del sistema; cuya cota inferior, a partir de la cual se expande, la da (17). Obviamente, (17) proporciona la energía interna del sistema en el estado estacionario, para el cual es válida la relación (16). Esta, a diferencia del resultado que proporciona el teorema del virial -el cual ha desempeñado un destacado papel en la astrofísica /10/ por haber sido la única forma aproximada de relacionar la energía del movimiento térmico y la energía potencial gravitacional del sistema- se establece a través de una derivación que descansa exclusivamente en las leyes de la mecánica clásica.

Por otra parte, el método dinámico resulta ineficaz para deducir (11), lo cual muestra la conveniencia en definir (4) y (5) para abordar, mediante el método energético, la descripción matemática del movimiento de los C.M. de los subsistemas. El hecho de que $k \neq 1$ implica que H y G son dos coeficientes de proporcionalidad numéricamente diferentes. Esto debe constituir motivo de alarma, ni nadie puede ver en ello una violación de la Ley de la Gravitación Universal de Newton similar a la que algunos infieren del experimento del geofísico Stacey /11/, lo cual ha dado pie a una tremenda polémica. Aquí la cuestión es más sencilla. La atracción gravitacional entre dos puntos materiales está, siempre, regida por una ley de la inversa del cuadrado de la distancia; pero cuando la distancia de separación no se puede despreciar en comparación con las dimensiones de los cuerpos que ellos representan, entonces, se requiere especificar su forma: si son esferas la constante de gravitación es G, mientras que si son los hemisferios de una de éstas, de densidad de masa uniforme, entonces, es H.

El caso eléctrico da para C el valor que aparece en (9), como constancia de que la analogía formal entre las interacciones gravitacionales y eléctricas mantiene su vigencia. Una última observación. Es oportuno aclarar que si bien las partículas elementales electrizadas, en reposo, presentan un campo con simetría esférica, por más de una razón, no se puede garantizar el rango de validez de (19) a las mismas. De esta manera, si es que tiene sentido, sigue en pie el controvertible problema de la fuerza de repulsión entre las partes del electrón /12/.

## CONCLUSIONES

Los resultados de mayor significación son:

1. La determinación de la constante adimensional que relaciona los coeficientes de proporcionalidad de las leyes de la inversa del cuadrado de la distancia, de Newton y de Coulomb, con las que rigen las interacciones gravitacionales o eléctricas de los hemisferios en que se subdivide, virtualmente, la distribución esférica de partículas.

2. La solución analítica de la ley del movimiento como un problema de dos cuerpos, de donde se deducen, de un lado, el caso particular en que el campo gravitacional del sistema es despreciable y, del otro, aquel en que las partículas neutras están inicialmente en reposo; siendo éste de especial interés, por cuanto la ecuación del movimiento de contracción puede derivarse por otro procedimiento: mediante consideraciones energéticas que engloben a todo el sistema.

3. La deducción de la relación entre la energía del movimiento térmico y la energía potencial gravitacional de la distribución en el estado estacionario, la cual, en orden de magnitud, coincide con el estimado estadístico del teorema del virial.

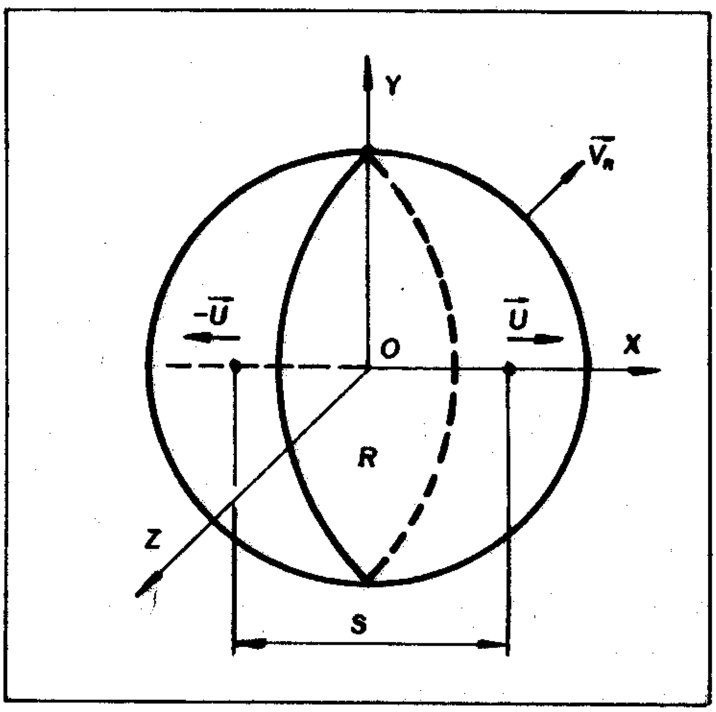


Figura 1. Sistema de partículas en expansión.

## REFERENCIAS


1. IÑIGUEZ, J.M. y R. CID (1965): Mecánica Teórica, vol. 2, Edit. Dossat, Madrid, p. 317.

2. CAMPUSANO, L.E. (1982): Astrofísica Estelar: de 1 900 al Sputnik I, Edit. Universitaria, Stgo. de Chile, p. 50-55.

3. LYSIKOV, Iu I. (1981): Appl. Math. Mech., 45(6).

4. GARCIA, M.A.H. (1985): Revista Cubana de Física, V(1).

5. PAPP, D. (1961): Historia de la Física, Edit. Espasa-Calpe, Madrid, p. 134.

6. VAILATI, J. (1947): Contribución a la Historia de la Mecánica, Edit. Espasa-Calpe, Buenos Aires, p. 127-33.

7. SAVÉLIEV, I.V. (1984): Curso de Física General, vol. 1, Mir, Moscú, p. 178.

8. STARJINSKI, V.M. (1986): Mecánica Teórica, Mir., Moscú. p. 153.

9. LANDAU, L.D. and E.M. LIFSHITZ (1962): The Classical Theory of Fields, 2 ed., Add.-Wesley, U.S.A., p. 215-7.

10. PEIMBERT, M. (1984): Temas Selectos de Astrofísica, U.N.A.M., México, p. 49-51.

11. RAÑADA, A. (1988): Revista Española de Física, 2(3).

12. FEYMANN, R.P., R.B. LEIGHTON and M. SANDS (1964): The Feymann Lectures on Physics, vol. 2, U.S.A., p. 1-1, 1-2.