CALCULO Y ANALISIS DE BOBINAS CORRECTORAS DEL CAMPO MAGNETICO PARA EQUIPOS RMNI CON NUCLEOS DE AIRE: II. BOBINAS CIRCULARES

L. Bergues C. y F. Reguera M., Centro de Biofísica Médica (CBM), Universidad de Oriente.

RESUMEN

Se hace un cálculo teórico de la componente z del campo magnético (B_z) para diferentes configuraciones de bobinas circulares que se usan para corregir las inhomogeneidades del campo magnético. Así como un análisis del (ó) los ódenes más bajos de los gradientes no deseados y maximizar el orden del gradiente deseable. Se optimizan los parámetros de las diferentes configuraciones de bobinas.

ABSTRACT

A theorical calculus of z component of B_z (magnetic field) is made for different configurations of circular coils being used to correct inhomogeneties of the magnetic field. As well as an analysis of the lowest order or orders of not desired gradients and to make maximum the order of the desired gradient. The parameters of the different configuration of coils are optimized.

1. INTRODUCCIÓN

En [1] se calculó un sistema de bobinas correctoras saddle - shaped para corregir las inhomogeneidades radiales de un electroimán con núcleo de aire para R.M.N.I. Además de estas debe tenerse en cuenta las deformaciones naturales de B_2 a lo largo del eje de simetría, las cuales se eliminan con un sistema de bobinas circulares colocadas simétricamente respecto al origen.

En el presente trabajo se hace un análisis detallado del cálculo de estas bobinas usando un desarrollo de Fourier-Bessel; para corregir estas inhomogeneidades se procede a eliminar los gradientes de más bajos ódenes no deseables y maximizar el orden del gradiente deseado.

2. FORMULISMO MATEMÁTICO

En [1] se obtuvo una expresión general de la componente B_z del campo para distintas configuraciones de bobinas saddle-shaped, esta expresión también es válida para sistemas de bobinas circulares. Para cada configuración de bobina se propone una función $F_\varphi(\varphi, z)$ construida sólo con la delta de Dirac ($\delta(x)$), ya que, la función Paso Unitario de Heaviside ($H(x)$) en el proceso de integración es igual a 1, una vez conocida la expresión de $F_\varphi(\varphi, z)$ se le halla su transformada por Fourier dada por (1) y esta se sustituye en la expresión de B_z dada por (2). Para encontrar los parámetros óptimos de las configuraciones de bobinas como son: el número de vueltas (N) y las distancias a que están las bobinas del centro magnético (d_i) ($i = 1, 2, \ldots$). Los cálculos se referirán a la espira central y luego se superpondrá el aporte de las otras espiras; finalmente se anula o minimiza el o los órdenes más bajos de los gradientes no deseados y se busca el orden del gradiente a maximizar. Las expresiones (2a) y (7) de [1] serán las utilizadas como base de estos cálculos.

$$F_\varphi^m(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi}\, d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz}\, F_\varphi(z, \varphi)\, dz \qquad (1)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 a}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{im\varphi}\, e^{ikz}\, F_\varphi^m(k)\, I_m(kp)\, K_m'(ka)\, dk \qquad (2)$$

3. EJEMPLOS

a) La Figura 1 muestra una espira circular que produce un campo $B_z \sim z^0$ que está situada en el centro del sistema magnético. Entonces $F_\varphi(\varphi, z)$ tiene la forma:

$$F_\varphi = (\varphi, z) = I\ \delta(2-0)\ H(\varphi+\pi)\ \left[1-H(\varphi+\pi)\right] \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1) y luego en (2) es fácil ver que B_z será distinto de cero si m = 0

$$B_z = \frac{\mu o\ Ia^2}{2}\ \left[A_o + A_1\rho^2 + A_2\rho^4 + A_3\rho^6 + \ldots\right] \qquad (4)$$

Si superponemos a esta espira N vueltas, la expresión (4) quedará multiplicada por N. Si $\rho = 0$ se obtiene la componente B_z de una bobina a lo largo del eje z.

$$B_z = \frac{\mu o\ INa^2}{2} A_o \qquad (4a)$$

donde

$$A_o = (a^2 + z^2)^{-3/2}$$

b) La Figura 2 muestra dos espiras circulares que respecto al centro magnético se encuentran a una distancia d y por las cuales circulan corrientes en sentidos opuestos. Esta configuración proporciona un campo $B_z \sim z$, siendo

$$F_\varphi(\varphi, z) = I\ \left[\delta(z-d) - \delta(z+d)\right]\ H(\varphi+\pi)\ \left[1-H(\varphi+\pi)\right] \qquad (5)$$

Si a una de las espiras se le superpone N_1 vueltas y a la otra N_2 vueltas, entonces el problema es encontrar d, N_1 y N_2 que son los argumentos de los coeficientes del desarrollo. Sustituyendo (5) en (1) y luego en (2) se tiene

$$B_z = \frac{\mu o\ IaN}{\pi}\ \left[B_1 z + B_2\left(\frac{z\rho^2}{4} - \frac{z^3}{6}\right) + \right.$$
$$\left. + B_3\left(\frac{z\rho^1}{64} - \frac{z^3\rho^2}{24}\right. + \right.$$

si $\rho = 0$ se llega a

$$B_z = \frac{\mu o\ IaN}{\pi}\ \left[B_1 z + B_2' z^3 + B_3' z^5 + \ldots\right]. \qquad (6a)$$

Si se desea el término de primer orden z basta anular el coeficiente del término de tercer orden z^3, es decir, $B_2' = 0$, obteniéndose $d = \pm(\sqrt{3}\ /\ 2)a$ y $N_1/N_2 = 1$.

c) La Figura 3 muestra una configuración de tres espiras circulares, en el par externo la corriente I_1, circula en el mismo sentido y está

ubicada respecto al centro magnético a una distancia d_1; por la otra circula una corriente I_2 que va en sentido opuesto a I_1 y está colocada en el centro magnético de la configuración ($d_2 = 0$). Esta configuración proporciona un campo $B_z \sim z^2$. $F_\varphi(\varphi, z)$ tiene la forma:

$$F_\varphi(\varphi, z) = I \left[\delta(z-d_1) + \delta(z+d_1) - \delta(z-0) \right] H(\varphi+\pi) \cdot \left[1-H(\varphi+\pi) \right] \quad (7)$$

Si al par externo se le superpone N_1 vueltas y a la otra N_2, ahora los coeficientes C_i ($i = 1, 2, \ldots$) son funciones de d_1 y N_1/N_2.

Sustituyendo (7) en (1) y luego en (2) es fácil ver que B_z será distinto de cero, si $m = 0$.

$$B_z = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \left[C_o + C_1\left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{z^2}{6}\right) + C_2\left(\frac{\rho^4}{64} - \frac{z^2\rho^2}{8} + \frac{z^4}{24}\right) + \right.$$

$$\left. + C_3\left(\frac{\rho^6}{2304} - \frac{z^2\rho^4}{128} + \frac{z^4\rho^2}{96} - \frac{z^6}{720}\right) + \ldots \right] \quad (8)$$

Si $\rho = 0$

$$B_z = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \left[C_o + C_1' z^2 + C_2' z^4 + C_3' z^6 + \ldots \right] \quad (8a)$$

Si se quiere que el término de segundo orden z^2 sea máximo basta anular los coeficientes de z^0 y z^4, obteniéndose

$$d_1 = \pm 2.941920095a \quad y \quad N_1/N_2 = 15$$

d) La Figura 4 muestra una configuración de cuatro espiras circulares, por el par externo circula una corriente I_1 en el mismo sentido y está ubicado respecto al centro magnético a una distancia d_1. En el par interno circula una corriente I_2 en el mismo sentido, pero en sentido contrario a I_1 y está situado respecto al centro magnético a una distancia d_2. Esta configuración se utiliza para obtener un campo $B_z \sim z^2$ y $B_z \sim z^4$. Para estos dos casos se obtuvo que

$$F_\varphi(\varphi, z) = I \left[\delta(z-d_1) + \delta(z+d_1) - \delta(z-d_2) - \delta(z+d_2)\right] \cdot$$

$$\cdot H(\varphi+\pi) \left[1-H(\varphi+\pi)\right] . \quad (9)$$

Si al par externo le superponemos N_1 vueltas y al interno N_2 vueltas, los coeficientes del desarrollo son funciones de d_1, d_2 y N_1/N_2.

Sustituyendo (9) en (1) y luego en (2) es fácil ver que B_z será distinto de cero, si $m = 0$

$$B_z = -\frac{\mu o\ I}{2\pi}\left[D_o + D_1\left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{z^2}{6}\right) + D_2\left(\frac{\rho^4}{64} - \frac{z^2\rho^2}{8} + \frac{z^4}{24}\right) + \right.$$

$$\left. + D_3\left(\frac{\rho^6}{2304} - \frac{z^2\rho^4}{128} - \frac{z^4\rho^2}{96} - \frac{z^6}{720} + \ldots\right]\right. \quad (10)$$

Si $\rho = 0$.

$$B_z = -\frac{\mu o\ I}{2\pi}\left[D_o + D_1' z^2 + D_2' z^4 + D_3' z^6 + \ldots\right] \quad (10a)$$

Si se desea el término de segundo orden z^2 basta anular los coeficientes de z^o y z^4 teniéndose

$d_1 = \pm\ 1.592864217a$, $\quad d_2 = \pm\ 0.2669422037a$ y $N_1/N_2 = 6$

Si se desea el término de cuarto orden z^4 basta anular los coeficientes de z^o y z^2 teniéndose

$d_1 = \pm\ 2.378746697a$, $\quad d_2 = \pm\ 0.7340984559a$ y $N_1/N_2 = 9$

e) La Figura 5 muestra una configuración de cuatro espiras circulares. En el par externo la corriente que circula está en sentido opuesto (I_{11} e I_{12}) y se encuentra a una distancia d_1 del centro magnético. En el par interno la corriente circula en sentido opuesto (I_{21} e I_{22}) pero en sentido contrario a I_{11} e I_{12} respectivamente, y está a una distancia d_2 del centro magnético. Esta configuración proporciona un campo $B_z \sim z^3$, se tiene que

$$F_\varphi(\varphi, z) = I\left[-\delta(z-d_1) + \delta(z+d_1) + \delta(z-d_2) - \delta(z+d_2)\right]\cdot$$

$$\cdot\ H(\varphi+\pi)\left[1-H(\varphi+\pi)\right] \quad (11)$$

Si al par externo le superponemos N_1 vueltas y al interno N_2, los coeficientes del desarrollo son funciones de d_1, d_2 y N_1/N_2.

Sustituyendo (11) en (1) y luego en (2) es fácil ver que B_z será distinto de cero, si $m = 0$

$$B_z = \frac{\mu o\ I}{\pi}\left[E_o z + E_1\left(\frac{z\rho^2}{4} - \frac{z^3}{6}\right) + E_2\left(\frac{z\rho}{64} - \frac{z^3\rho^2}{24} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{z^5}{120} + \ldots\right]\right. . \quad (12)$$

Si $\rho = 0$

$$B_z = \frac{\mu_o I}{\pi} \left[E_o z + E_1' z^3 + E_2' z^5 + \ldots \right] \qquad (12a)$$

Si se desea el término de tercer orden z^3 basta anular los coeficientes de z^1 y z^5 obteniéndose

$$d_1 = \pm 1.559282419a, \qquad d_2 = \pm 0.5155212314a \quad y \quad N_1/N_2 = 4$$

4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

La forma de proceder para el cálculo de la componente B_z del campo para distintas configuraciones de bobinas circulares para corregir las inhomogeneidades del campo magnético es: proponer la configuración de bobinas con sus respectivos sentidos de las corrientes, una vez propuesta esta, mediante la función $F_\varphi(\varphi, z)$ se describe el sentido de circulación en cada bobina y a qué distancia están estas del centro magnético, esto se hace a través de la delta de Dirac $(\delta(z - d_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, que fija las posiciones de las espiras, y de la función Paso Unitario de Heaviside $(H(x))$, que describe por donde circula corriente el sentido de esta viene dado por el signo que acompaña la delta (el signo de la corriente será positivo si esta circula saliendo del papel). Una vez propuesta $F_\varphi(\varphi, z)$ se le halla su transformada de Fourier $F_\varphi^m(k)$ dada por (1) y luego esta se sustituye en la expresión (2) y se ve fácilmente que las expresiones de B_z obtenidas para las configuraciones son distintas de cero si $m = 0$. Para cada configuración de bobina existirá una $F_\varphi(\varphi, z)$ específica y por tanto habrá formas de B_z para cada una de ellas. Las expresiones de B_z obtenidas para cada configuración son funciones de ρ y z, si $\rho = 0$ ellas coinciden con las reportadas en [2]. Las ecuaciones (4) y (6) son análogas con las reportadas en [4], si en este último se desprecia el efecto de apantallamiento y además este desarrollo de Fourier-Bessel es de más fácil manejo que el propuesto por Hoult [2], ya que evita trabajar con sumas discretas; las integrales que aparecen vienen tabuladas [5], [6], [7] de ahí la comodidad de trabajarlas y la simplicidad de las expresiones obtenidas, en este desarrollo los términos aparecen directos.

En artículos ulteriores se publicarán los efectos que provocaron las bobinas shims calculadas en el mejoramiento de la homogeneidad del sistema magnético.

6. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Dr. R. Riera A. por sus sugerencias y corrección en la elaboración de este trabajo.

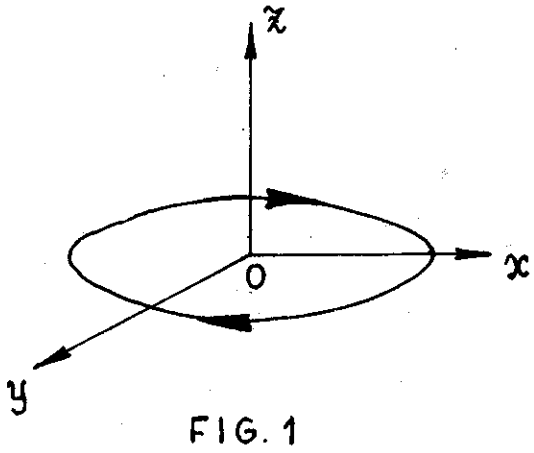

Figura 1. Muestra una espira circular que produce un campo $B_z \sim z^o$ que está situada en el centro del sistema magnético.

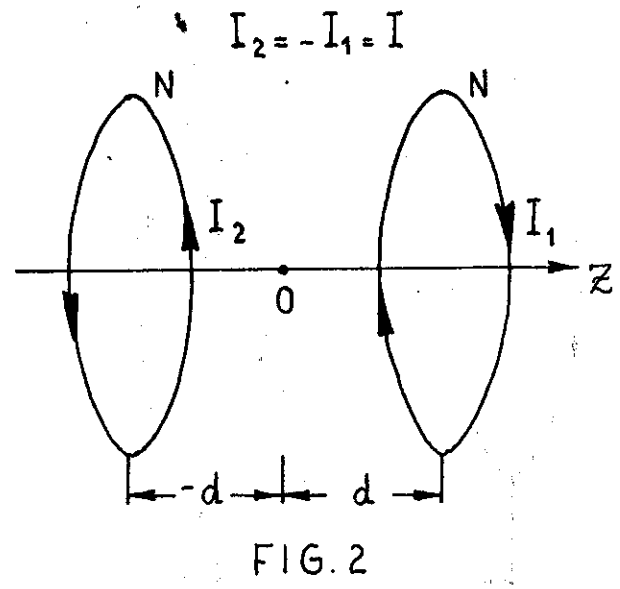

Figura 2. Muestra dos espiras circulares que respecto al centro magnético se encuentran a una distancia d y por las cuales circulan corrientes en sentidos opuestos.

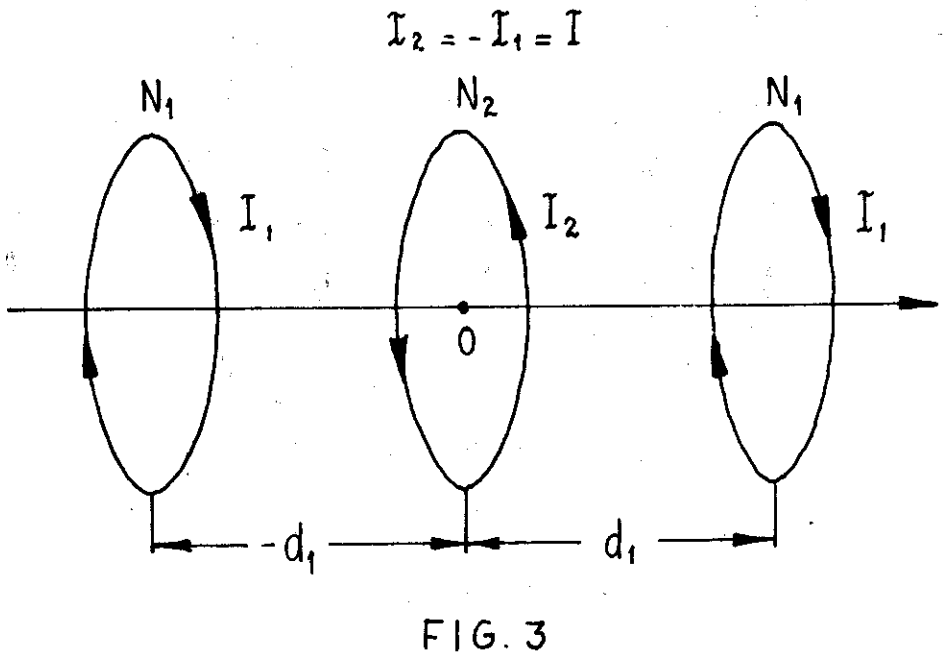

Figura 3. Muestra una configuración de tres espiras circulares.

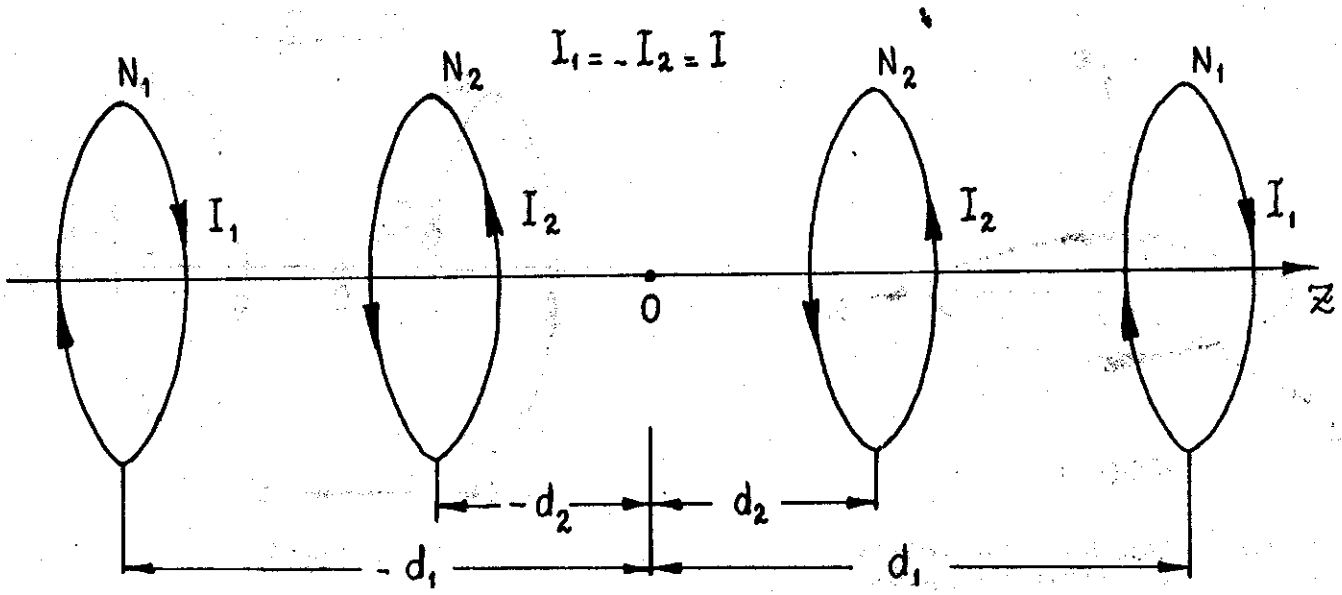

FIG. 4

Figura 4. Muestra una configuración de cuatro espiras circulares.

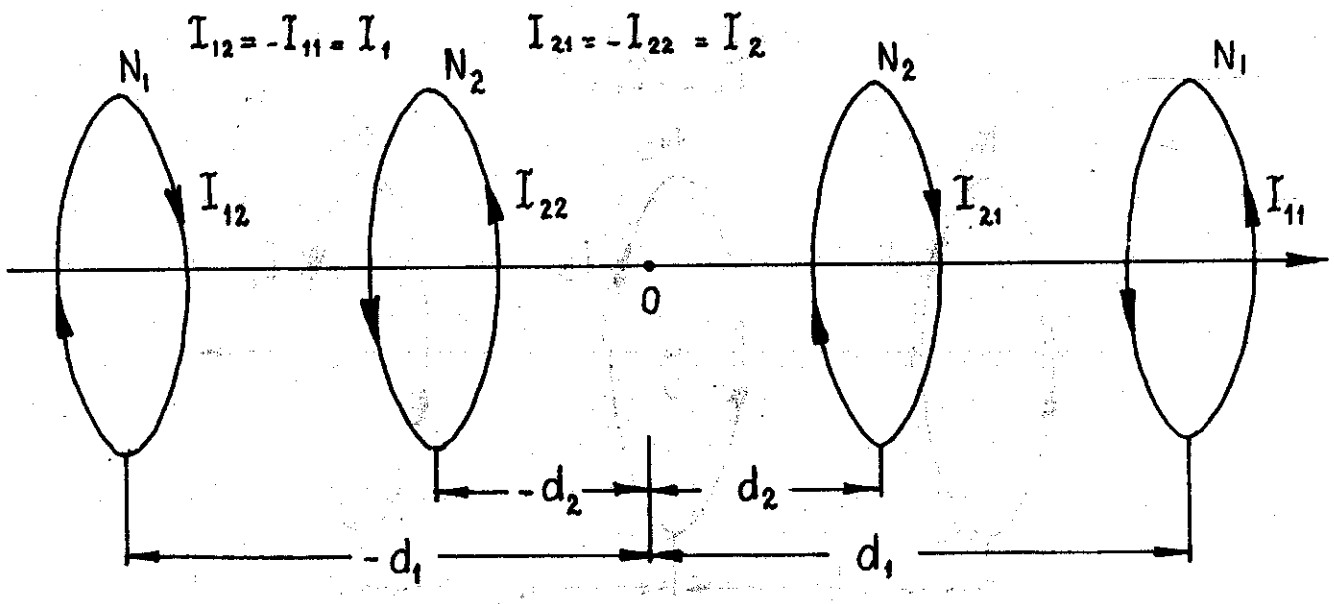

FIG. 5

Figura 5. Muestra una configuración de cuatro espiras circulares.

7. REFERENCIAS

[1] BERGUES, L. y F. REGUERA [en prensa]: Revista Cubana de Física.

[2] ROMEO, F. and D.I. HOULT (1984): Magn. Reson. in Medicine, 1, 44-65.

[3] ANDERSON, N.A. (1961): Rev. Sci. Instrum., 32, 241-250.

[4] TURNER, R. and R.M. BOWLEY (1986): J. Phys., E:Sci. Instrum.

[5] DITKIN, V.A. and A.P. PRUDNIKOV (1965): Integral Transforms and Operational Calculus, (Pergamon Press).

[6] LEBEDEV, V.N. (1965): Special function and Thein applications, Prentice-Hall, INC. Englewood, Cliffs, N.J.

[7] SPIEGEL, M.R.: Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Editorial Dossat, S.A.