SOLITONES Y BURBUJAS SOLITONICAS EN CAMPOS EXTERNOS

Jorge A. González, Departamento de Física, Universidad de Camagüey.

RESUMEN

Se obtienen expresiones exactas para estados ligados solitón-antisolitón, fuerza de interacción solitón-antisolitón; solitones en campos externos no homogéneos y burbujas solitónicas tridimensionales.

ABSTRACT

Exact expressions for bound soliton-antisoliton states; soliton-antisoliton interaction force; solitons in inhomogeneous external fields and three-dimensional solitonic bubles are obtained.

I. Es conocido el importante papel que juegan los solitones en la física moderna y en particular en la descripción de paredes de dominio durante transiciones de fase estructurales en cuerpos sólidos, así como partículas elementales en la teoría del campo [1-6].

Para el estudio de campos escalares, uno de los modelos más empleados es la llamada teoría φ^4 [2-4, 7]. Mucho menos conocida es la teoría del potencial "módulo cuadrado", $(/\varphi/ - 1)^2$, [4] que, sin embargo, puede servir de alternativa a la teoría φ^4.

La teoría $(|\varphi| - 1)^2$ también posee solitones y antisolitones. Su ventaja radica en que pueden obtenerse soluciones solitónicas exactas para un gran número de problemas no solubles en los marcos de otras teorías pero cualitativamente equivalentes.

Esta propiedad ha sido asombrosamente poco explotada en la literatura.

En la presente comunicación se presentarán soluciones exactas a los siguientes problemas: estados ligados solitón-antisolitón bajo la acción de una fuerza constante, fuerza de interacción solitón-antisolitón, solitones en campos externos no homogéneos; solitón tridimensional que describe una burbuja de una fase en otra. También se harán consideraciones generales que permiten conocer la dinámica de los solitones en campos variables.

II. La lagrangiana en la teoría $(|\varphi| - 1)^2$ en variables adimensionales es la siguiente

$$L = \int \left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - (|\varphi| - 1)^2 \right] d^0 x \qquad (1)$$

La ecuación del campo unidimensional es

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\,\mathrm{sgn}(\varphi)\,(|\varphi| - 1) = 0 \qquad (2)$$

Aunque la ecuación (2) es no lineal puede ser expresada en forma lineal en los intervalos $\varphi > 0$ y $\varphi < 0$.

Utilizando esta propiedad no es difícil obtener la conocida solución solitónica.

$$\varphi_s = \mathrm{sgn}z \,(1 - \exp\,[- \mathrm{sgn}(z)\,\sqrt{2}\quad) \qquad (3)$$

donde $Z = \dfrac{x - vt - x_o}{\sqrt{1 - v^2}}$

Aquí x_o es la posición inicial del solitón, v es la velocidad del solitón.

También existe el antisolitón

$$\varphi_a = - \varphi_s$$

En nuestros trabajos [5-7] se mostró que si en el medio existe una fuerza constante, entonces pueden formarse estados ligados solitón-antisolitón.

Veamos la ecuación

La condición para que (8) posea solitones es que existan tres puntos críticos [5, 7, 9] y esto se cumple si

$$|h(x)| < 2, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Para ser más concretos, tomemos un caso particular en que h(x) posee u cero en el origen. En específico, supongamos que h(x) tiene forma de solitón:

$$h(x) = a \operatorname{Sgnx} (1 - \exp [- \operatorname{Sgn}(x) dx]) \tag{9}$$

En este caso existen dos tipos de soluciones estacionarias, una *solitónica:*

$$\varphi = \operatorname{Sgnx} \left(1 - \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{(d^2 - 2)} + \frac{a}{2} - 1\right) \exp [-\operatorname{sgn}(x) \sqrt{2}\, x] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{(2 - d^2)} \exp [-\operatorname{Sgn}(x) dx]\right) \tag{10a}$$

Y una antisolitónica:

$$\varphi = \operatorname{Sgnx} \left(-1 - \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{(d^2 - 2)} + 1 + \frac{a}{2}\right) \exp [-\operatorname{sgn}(x) \sqrt{2}\, x] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{(2 - d^2)} \exp [-\operatorname{Sgn}(x) dx]\right) \tag{10b}$$

Empleando los métodos tradicionales para la investigación de la estabilidad de los solitones [3, 4, 9] es fácil mostrar que para $ad > 0$ la solución solitónica es inestable, mientras que la antisolitónica es estable. Para $ad < 0$ ocurre lo contrario.

IV. En los trabajos [10, 11] han sido estudiadas soluciones aproximadas tridimensionales esféricas que describen burbujas, provocadas por transiciones de fase.

Los estados estacionarios con simetría radial esférica en la teoría del potencial "módulo cuadrado" son soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - 2 \operatorname{Sgn}(\varphi) (/\varphi/ - 1) = h \tag{11}$$

Sea $h > 0$. En este caso la solución que describe una burbuja estacionaria tiene las propiedades

$$\lim_{r \to \infty} \varphi = 1 - \frac{h}{2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r}/_{r=0} = 0, \qquad \varphi/_{r=0} < 0.$$

Para $\varphi > 0$ la solución de (11) es

$$\varphi = 1 - \frac{h}{2} + \frac{c \exp (-\sqrt{2}\, r)}{r} \tag{12}$$

Las burbujas descritas por las soluciones (12) y (13) son inestables [10, 11] y pueden contraerse o expandirse.

Realmente, ellas se forman debido al equilibrio de dos fuerzas: la fuerza de atracción entre las paredes de la burbuja (las paredes de la burbuja tridimensional se forman con "ladrillos" solitónicos unidimensionales de tal forma que *los "ladrillos solitónicos en la pared de* enfrente poseen "ladrillos antisolitónicos" con los cuales se atraen mutuamente) y la fuerza h que actúa sobre cada punto de la pared, pero hacia el exterior.

Una burbuja que posea un radio inferior al crítico (10) tiende a colapsar. Las burbujas de radio superior se expanden. Todo depende de la fuerza que predomine.

Este comportamiento de las burbujas es conocido experimentalmente en termodinámica [12].

La fórmula (16) permite calcular el radio crítico incluso para campos externos intensos.

REFERENCIAS

[1] LONNGREN, K., A. SCOTT (1978): Solitons in action, Academic Press, London.

[2] BISHOP, A.R., J.A. KRUMHANSL, S.E. TRULLINGER (1980): Physica D1, 1.

[3] MAKHANKOV, V.G. (1978): Phys. Reports 35, 1.

[4] MAKHANKOV, V.G., V.K. FEDYANIN (1984): Phys. Rep. 104, 1.

[5] GONZÁLEZ, J.A, J.A. HOLYST (1987): Phys. Review B35, 3643.

[6] -------------------------- (1986): "Solitory waves in one-dimensional damped systems".
ICTP, Trieste, Int. Report Ic/86/122.

[7] GONZÁLEZ, J.A. "Exact soliton-like solutions of perturbed φ^4 - equation".
ICTP, Trieste, Int. Report Ic/86/79 (1986).

[8] GONZÁLEZ, J.A., J. ESTRADA-SARLABOUS: "Kinks in systems with degenerate critical points".
ICTP, Trieste, Int. Report IC/88/259 (1988).
Phys. Lett. A 140, 189 (1989).

[9] FURUNDJIEV, R., J.A. GONZÁLEZ: "Solitones en campos externos no homogéneos".
Ciencias Fisicomatemáticas Uc - 3 - 1988, pág. 10 Prep. - Universidad de Camagüey.