

INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES VISCOELASTICAS EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SONORAS DE PEQUEÑA AMPLITUD

Oscar Sotolongo Costa, Alexei Vázquez Vázquez, Enrique López Pages, José Marín Antuña
Departamento de Física Teórica, Universidad de la Habana.

RESUMEN

El análisis de los materiales con propiedades viscoelásticas es uno de los objetos de estudio de la Reología en la actualidad. En este artículo se analizan las oscilaciones lineales de la velocidad en un fluido viscoelástico del tipo Oldroyd A y obtenemos una ecuación lineal en derivadas parciales de tercer orden no clásica para describirlas. A partir de dicha ecuación se obtienen las relaciones de dispersión en este medio. Los resultados contienen, como caso particular, al fluido de Maxwell y al Newtoniano. Se observan, además, ciertas semejanzas con el comportamiento de los fluidos viscosos compresibles, a partir de las cuales planteamos un modelo viscoelástico para el fluido viscoso compresible.

ABSTRACT

The analysis of materials with viscoelastic properties is one of the study objects of Rheology today. In this paper the linear oscillations of velocity in an Oldroyd A viscoelastic fluid are analyzed and a non classic linear partial differential third order equation is obtained to describe it. The Maxwell and the Newtonian fluid results as particular cases. Certain similarities with the behavior of viscous compressible fluids are observed. Starting on them a viscoelastic model for the viscous compressible fluid is established.

I- INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos ha crecido el interés por el estudio del comportamiento de los fluidos con propiedades viscoelásticas. Este interés viene dado porque los modelos viscoelásticos se ajustan a los resultados experimentales obtenidos en muchos fluidos poliméricos. Los fluidos viscoelásticos presentan a la misma vez características de los sólidos elásticos y los fluidos viscosos. En un sólido puramente elástico, el esfuerzo correspondiente a una deformación es independiente del tiempo, mientras que en sustancias con propiedades viscoelásticas este esfuerzo se disipará gradualmente. Por otra parte, en contraste con los fluidos puramente viscosos, los fluidos viscoelásticos sometidos a esfuerzos recuperan gradual y parcialmente su forma una vez eliminada la deformación inicial. Ejemplos de tales materiales lo constituyen las sustancias gelatinosas tales como el napalm; algunos asfaltos; polímeros líquidos, derretidos o en soluciones; emulsiones; y los líquidos normales en las cercanías del punto de solidificación.

En nuestro trabajo se analizará el comportamiento de estos medios ante una onda sonora de pequeña amplitud, para lo cual es necesario tener explícitamente la relación entre el tensor de esfuerzos y el campo de velocidades, resultado que se obtendrá en el epígrafe II. En el epígrafe III se obtiene la ecuación para las oscilaciones lineales de la velocidad y a continuación, en el epígrafe IV, se hallan las relaciones de dispersión en estos medios y se analiza la correspondencia de estas con los resultados experimentales. Por último, en el epígrafe V; se establece una comparación con los fluidos viscosos compresibles en relación con el comportamiento con la frecuencia de la velocidad de propagación de la onda y la viscosidad del medio, a partir de la cual planteamos un modelo viscoelástico para el fluido viscoso compresible.

II- TENSOR DE ESFUERZOS VISCOSOS PARA EL FLUIDO VISCOELÁSTICO DEL TIPO OLDROYD A.

En los fluidos normales se cumple la usual ley de Newton $\sigma = \eta \dot{\gamma}$, donde σ es el tensor de

esfuerzos, η la viscosidad ordinaria, $\gamma = (\nabla V + \nabla V^T)/2$ es el tensor velocidad de variación de las deformaciones y el supraíndice T simboliza la transposición. Para el estudio de fluidos más complejos se necesita de una relación más general entre los esfuerzos y las deformaciones, esta es la llamada ecuación constitutiva, que para el fluido viscoelástico incompresible tiene la forma [1-4]

$$\sigma + \lambda_1 D_t \sigma = 2\eta(\gamma + \lambda_2 D_t \gamma) \quad (2.1)$$

esta ecuación contiene tres parámetros: η la viscosidad y λ_1 y λ_2 los tiempos de relajación de los esfuerzos y las deformaciones respectivamente. En los fluidos Newtonianos ($\lambda_1 = \lambda_2$) y son muy pequeños, $\lambda_1 = 10^{-12}$ s para el agua, pero pueden ser diferentes y lo suficientemente grandes en soluciones poliméricas, $\lambda_1 = 2.54$ s y $\lambda_2 = 1.97$ s en el fluido de Boger (B11) [4]. D_t es un operador diferencial que viene definido por [2-4]

$$D_t[\omega] = \frac{d}{dt}[\omega] + [\omega - \omega] + \alpha(\gamma[\omega] + [\omega]\gamma) \quad (2.2)$$

donde ω es la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidades y α un parámetro que toma valores $-1 \leq \alpha \leq 1$, conteniendo como casos particulares a: $\alpha = -1$ (Oldroyd B), $\alpha = 0$ (Oldroyd A), $\alpha = 1$ (Jeffreys). En nuestro trabajo analizaremos un fluido viscoelástico del tipo Oldroyd A, $\alpha = 0$, y además irrotacional; luego $\nabla \times V = 0$ y por tanto el tensor gradiente de velocidades es simétrico: $\gamma = \nabla V$, $\omega = 0$. Bajo estas consideraciones el

operador diferencial D_t es igual a la derivada total y (2.1) se reduce a una ecuación diferencial lineal de primer orden para σ . Si en el instante inicial los esfuerzos y el tensor gradiente de velocidades son nulos entonces la solución de esta ecuación es:

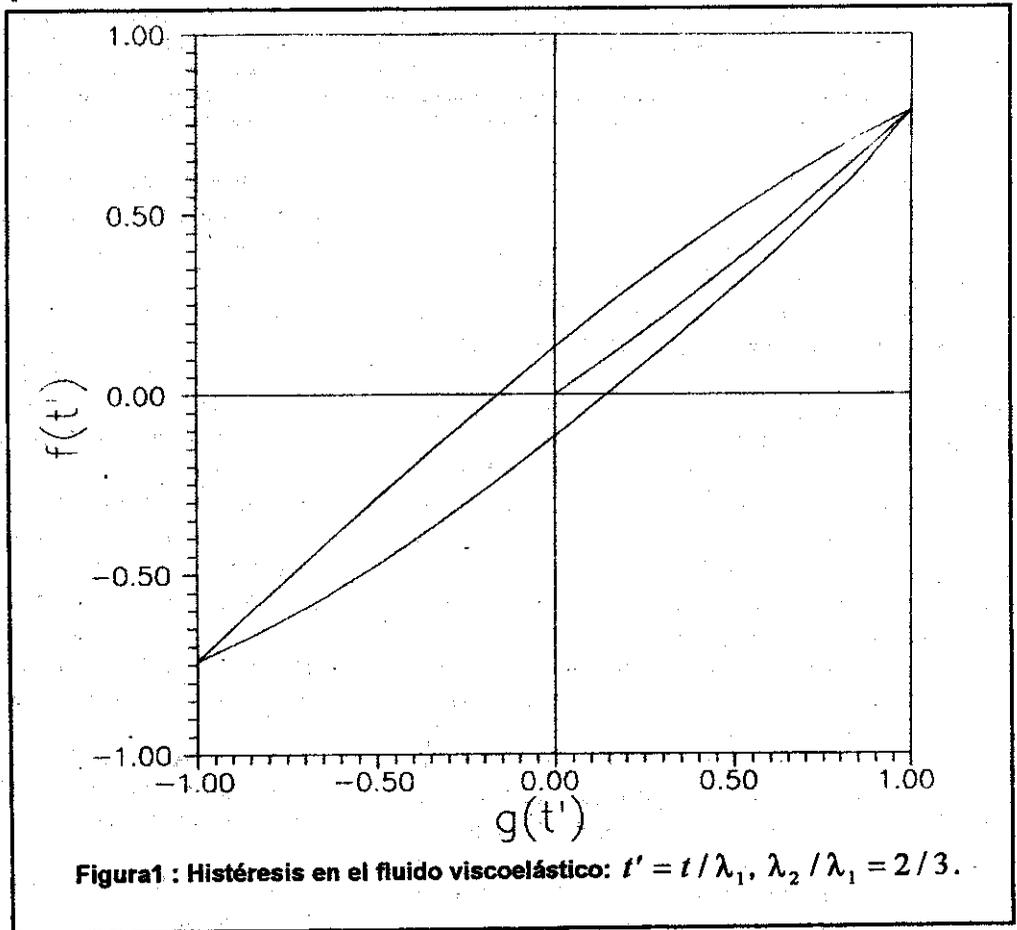
$$\sigma = 2\eta \nabla V + (\hat{d} - d_0) \nabla V \quad (2.3)$$

donde:

$$d_0 = 2\eta \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (2.4)$$

y \hat{d} es el operador de viscoelasticidad de cizalladura definido por:

$$\hat{d} = d_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{T-t}{\lambda_1}\right) \frac{dT}{\lambda_1} \quad (2.5)$$



(2.3) es el tensor de esfuerzos viscosos para el fluido viscoelástico irrotacional del tipo Oldroyd A, y contiene como casos particulares al fluido de Maxwell ($\lambda_2=0, d_0=2\eta$) y al fluido Newtoniano ($\lambda_1=\lambda_2=0, d_0=0, \hat{d}=0$). Esta solución ya la obtuvimos en [5], aunque en dicho trabajo nos limitamos a la expresión matemática.

Como puede verse el tensor de esfuerzos en el tiempo t no sólo es función de las deformaciones en dicho instante, va a depender también de las deformaciones en instantes anteriores. Para ver este efecto supongamos que el gradiente de velocidades tiene la forma: $\nabla \mathbf{V} = \mathbf{u}g(t)$, donde $g(t)$ varía linealmente con el tiempo, luego $\sigma = 2\eta \mathbf{u}f(t)$; en la Fig.1 se observa la dependencia de la parte temporal del tensor de esfuerzos con la parte temporal del gradiente de velocidades; en esta se aprecia claramente la histeresis evidenciando los efectos de memoria en el material.

III- ECUACIÓN DE ONDAS

El estado hidrodinámico de un fluido queda definido por la ecuación de movimiento, la de continuidad y la de estado, estas son:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma + \mathbf{g} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (3.2)$$

$$p = p(\rho, s) \quad (3.3)$$

donde p es la presión en el fluido, ρ su densidad, s su entropía específica y \mathbf{g} la fuerza externa por unidad de masa que supondremos nula. Este sistema es válido para cualquier tipo de fluido; el análisis de un tipo concreto depende de la forma del tensor de esfuerzos viscosos σ , que para el fluido viscoelástico viene dado por (2.3).

Analicemos oscilaciones pequeñas de la presión y la densidad con respecto a una posición de

equilibrio, escribamos la presión y la densidad en la forma:

$$p = p_0 + p', \quad p' \ll p_0 \quad (3.4)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho' \ll \rho_0 \quad (3.5)$$

donde p_0, ρ_0 son la presión y la densidad en el equilibrio y p', ρ' las variaciones relativas a estas magnitudes.

Consideremos, además, que la velocidad de las partículas del fluido en la onda es mucho menor que la velocidad de fase de la onda. Bajo estas suposiciones se pueden despreciar los términos no lineales en nuestro sistema de ecuaciones [6], y este se reduce a:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p' + \nabla \cdot \sigma \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.7)$$

$$p' = c_0^2 \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s', \quad c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (3.8)$$

donde $s' = s - s_0$. Como se demostró en [7]

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = -\frac{\chi}{c_p c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_\rho \nabla \cdot \mathbf{V} = -\alpha \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.9)$$

donde χ es el coeficiente de conductividad térmica y c_v y c_p los calores específicos a volumen y presión constante respectivamente. Eliminando p' y ρ' en las ecuaciones (3.6-3.9) y usando (2.3) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = c_\infty^2 \nabla^2 \mathbf{V} + M_\infty \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \hat{d} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (3.10)$$

donde:

$$c_{\infty}^2 = c_0^2 + \frac{d_0}{\lambda_1 \rho_0} \quad (3.11)$$

$$M_{\infty} = \frac{1}{\rho_0} \left(2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \alpha \right) \quad (3.12)$$

ecuación que describe las oscilaciones lineales de la velocidad en un fluido viscoelástico irrotacional del tipo Oldroyd A, la cual ya obtuvimos en [5], sólo que en aquella ocasión limitamos nuestro análisis a las ondas estacionarias.

IV RELACIONES DE DISPERSIÓN

Proponiendo en (3.10) una solución de la forma:

$$V = V_0 \exp[i(k \cdot x - \omega t)] \quad (4.1)$$

se obtiene; para $t \gg \lambda_1$, es decir pasando los transientes, que:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 - i\omega M'} \quad (4.2)$$

donde

$$M' = \frac{1}{\rho_0} \left(2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + d + \alpha \right) \quad (4.3)$$

$$d = \frac{d_0}{1 - i\omega \lambda_1} \quad (4.4)$$

A la magnitud d la llamaremos viscoelasticidad de cizalladura, que como vemos va a ser función de la frecuencia, y en general compleja. Para entender el significado de la parte real e imaginaria de dicha magnitud separemos parte real e imaginaria en el denominador del miembro derecho de (4.2):

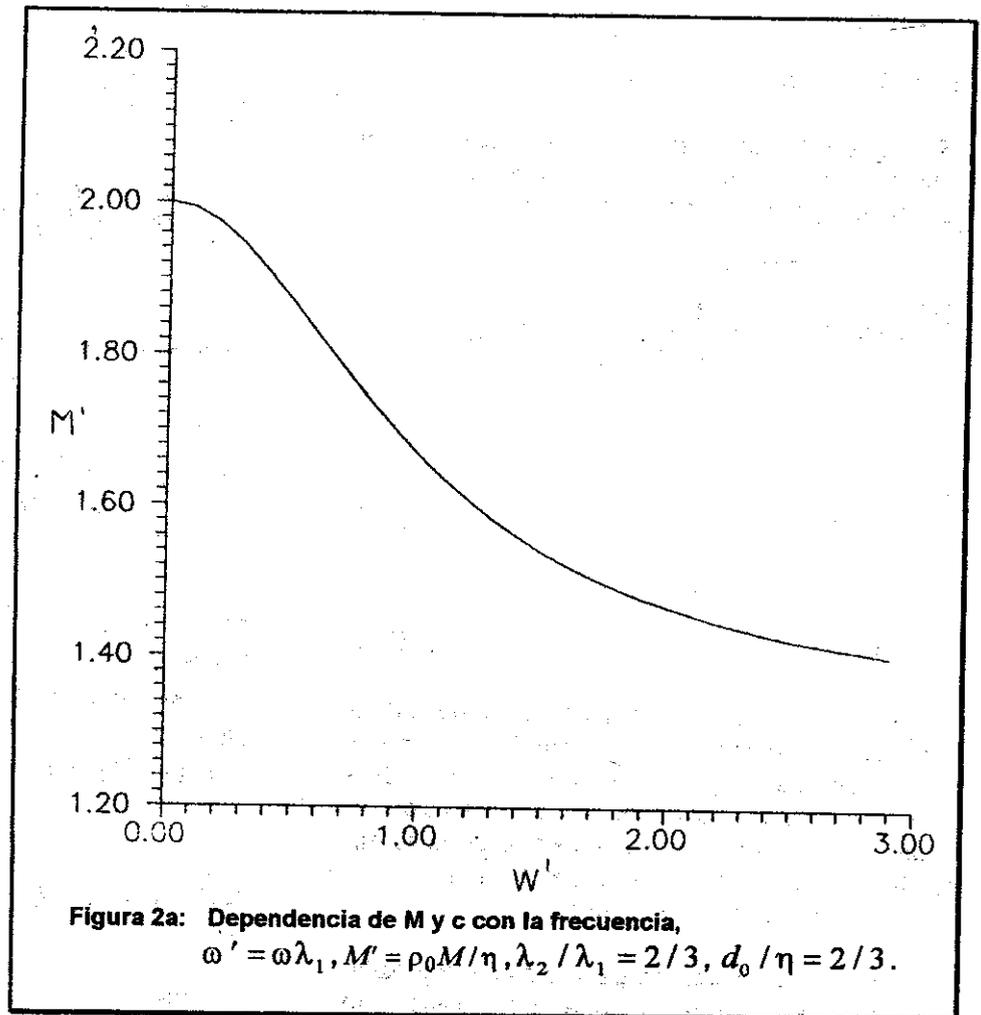
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2 - i\omega M} \quad (4.5)$$

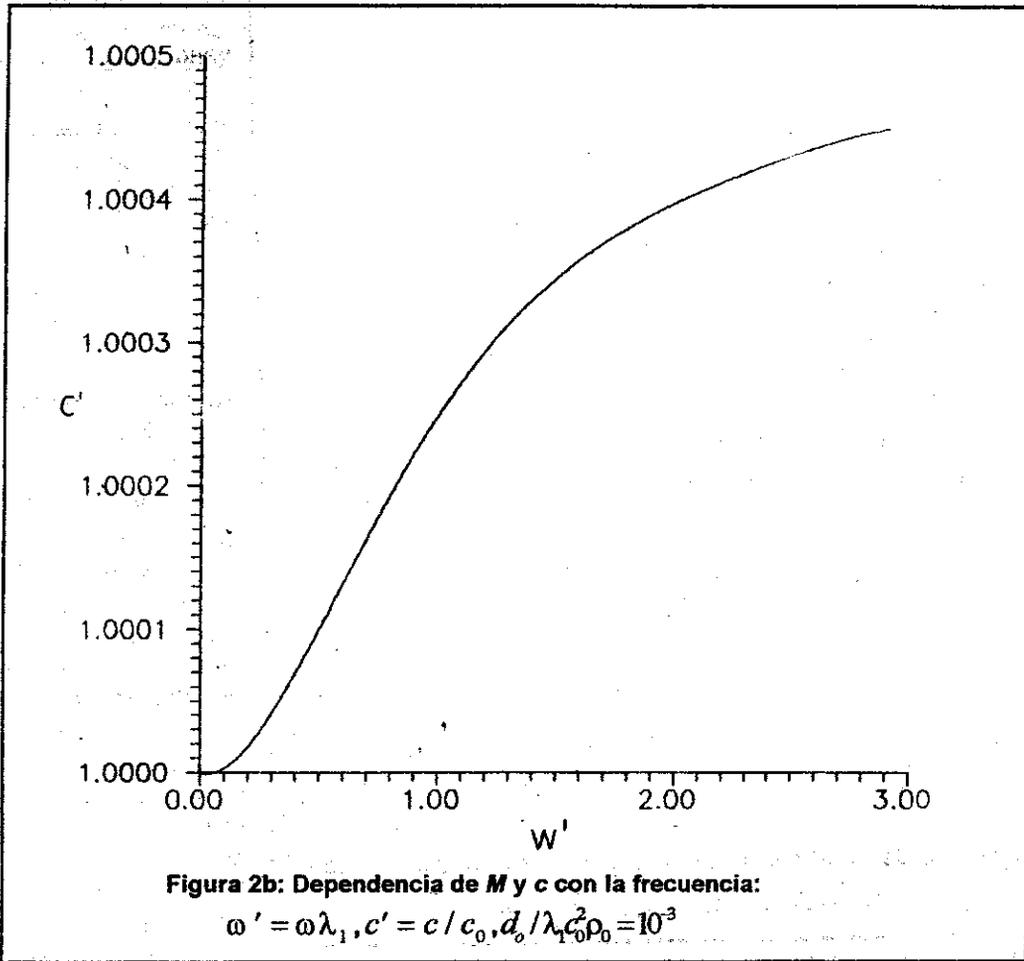
donde:

$$c^2 = c_0^2 + \frac{d_0}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\omega^2 \lambda_1^2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \quad (4.6)$$

$$M = \frac{1}{\rho_0} \left(2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \eta + \alpha + \frac{d_0}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right) \quad (4.7)$$

Entonces la parte real de la viscoelasticidad de cizalladura nos da la variación de la viscosidad cinemática total M con la frecuencia (Fig.2a), mientras que la parte imaginaria contiene la dependencia con la frecuencia de la magnitud c cuyo significado veremos más adelante (Fig.2b).





que para bajas viscosidades ($\eta \approx 0$) y despreciando la conductividad térmica ($\chi \approx 0$) se reduce a:

$$V_f \cong c \quad (4.11)$$

Entonces c es la velocidad de propagación del sonido para bajas viscosidades y poca conducción del calor, la cual va a depender de la frecuencia (Fig.2b).

k_2 es el coeficiente de absorción de la

Si $k = k_1 + ik_2$ de (4.5) se llega a:

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}\sqrt{c^4 + M^2\omega^2}} \sqrt{\sqrt{c^4 + M^2\omega^2} + c^2} \quad (4.8)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}\sqrt{c^4 + M^2\omega^2}} \sqrt{\sqrt{c^4 + M^2\omega^2} - c^2} \quad (4.9)$$

a partir de k_1 podemos hallar la velocidad de fase de la onda, esta va a ser:

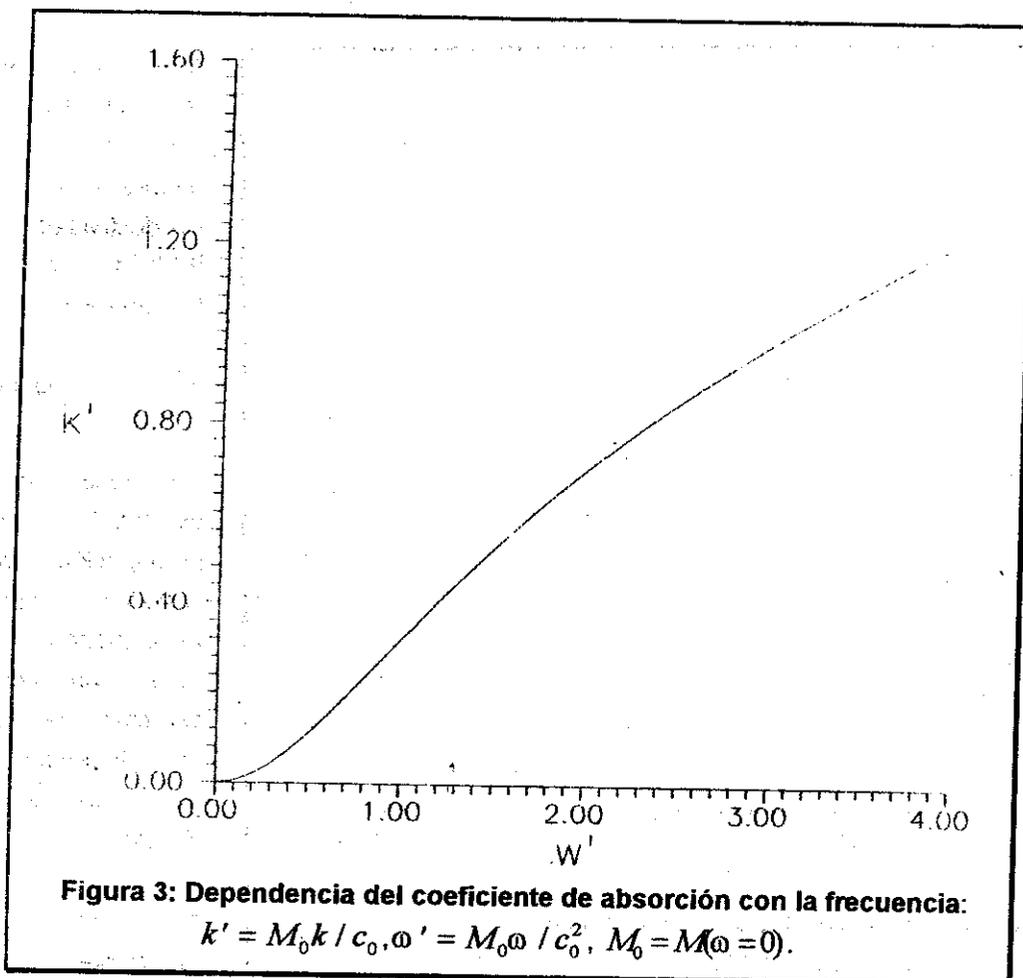
$$V_f = \frac{\omega}{k_1} = c \sqrt{2 \frac{1 + \frac{M^2}{c^4} \omega^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{M^2}{c^4} \omega^2}}} \quad (4.10)$$

onda, el comportamiento de este con la frecuencia se muestra en la Fig.3. Para bajas frecuencias $k_2 \propto \omega^2$ y para altas frecuencias $k_2 \propto \sqrt{\omega}$ presentando un punto de inflexión en la zona intermedia. Este comportamiento concuerda cualitativamente con los resultados experimentales reportados en [8].

En el fluido Newtoniano el coeficiente de absorción tiene una expresión similar, sólo que c y M son constantes e iguales a:

$$c = c_0, \quad M = \frac{1}{\rho_0} (2\eta + \alpha) \quad (4.12)$$

resultado que concuerda con el obtenido en [6] y es más general que el resultado al que se llegó en [7], válido a bajas frecuencias.



V- MODELO VISCOELÁSTICO PARA EL FLUIDO VISCOZO COMPRESIBLE.

Al analizar las oscilaciones pequeñas de la velocidad en un fluido viscoso compresible e irrotacional se obtiene la siguiente expresión para el vector de onda [7]:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 - i\omega M'} \quad (5.1)$$

donde:

$$M' = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta + \alpha \right) \quad (5.2)$$

ζ es la viscosidad volumétrica, que al obtener (5.1) se considera como un parámetro constante, pero es conocido que dicha magnitud es función

de la frecuencia. La dependencia de la viscosidad volumétrica con la frecuencia se puede obtener a partir de consideraciones fenomenológicas [9], esta es:

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{1 - i\omega \tau} \quad (5.3)$$

siendo τ el tiempo de relajación de los esfuerzos normales y ζ_0 la viscosidad volumétrica a bajas frecuencias. Como puede verse la viscosidad volumétrica tiene el mismo comportamiento con la frecuencia que la viscoelasticidad de cizalladura d (4.4). Por otro lado es conocido que tanto en los fluidos viscoelásticos incompresibles como en los viscosos

compresibles se manifiestan fenómenos de viscoelasticidad [11]; en los primeros debido al retraso de los esfuerzos de cizalladura con respecto a las deformaciones (viscoelasticidad de cizalladura), en los segundos producto del retraso de los esfuerzos normales respecto a la variación del volumen específico (viscoelasticidad normal).

Basados en lo expuesto anteriormente y en la expresión conocida para el tensor de esfuerzos viscosos en el fluido viscoso compresible [9] planteamos un modelo viscoelástico para el fluido viscoso compresible, en el cual el tensor de esfuerzos viscosos tiene la forma:

$$\sigma = 2\eta \gamma + \left(\hat{\zeta} - \frac{2}{3} \eta \right) I \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (5.8)$$

donde I es el tensor unitario y $\hat{\zeta}$ es el operador de viscoelasticidad normal que tiene la forma:

$$\hat{\zeta} = \zeta_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right) \frac{dT}{\tau} \quad (5.9)$$

En (5.8) puede verse que los efectos viscoelásticos se van a manifestar en los esfuerzos normales, de ahí el nombre de viscoelasticidad normal.

Si ahora analizamos las oscilaciones pequeñas de la velocidad, tomando en cuenta a (5.8) como expresión para el tensor de esfuerzos y considerando irrotacional el fluido, de manera análoga a como se hizo para el fluido viscoelástico en el epígrafe III, se obtiene una ecuación similar a (3.10) para la velocidad si:

$$\tau = \lambda_1, \quad \frac{2}{3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \zeta_0 = d_0 \quad (5.7)$$

Y las relaciones de dispersión para esta ecuación vendrán dadas, en forma análoga, por (4.8) y (4.9), teniendo en cuenta las equivalencias dadas en (5.10). Además (4.10) será la velocidad de fase de la onda en el fluido viscoso compresible en el caso de bajos valores de η , ζ_0 y χ , cuyo comportamiento con la frecuencia se mostró en la Fig.2b el cual coincide con el comportamiento real [10].

CONCLUSIONES

La expresión obtenida para el tensor de esfuerzos viscosos en un fluido viscoelástico irrotacional del tipo Oldroyd A (2.3), en el cual los efectos viscoelásticos aparecen a través del operador de viscoelasticidad \hat{d} , es de suma importancia para realizar cualquier análisis hidrodinámico de este medio, lo cual le confiere una gran importancia. Los efectos de viscoelasticidad se van a manifestar en las relaciones de dispersión, provocando que la velocidad de propagación del sonido y la viscosidad varíen con la frecuencia.

El coeficiente de absorción de la onda en el fluido viscoelástico (4.9) contiene como casos particulares

los resultados reportados en [5-7] para el fluido newtoniano y presenta una buena concordancia cualitativa con los resultados experimentales reportados en [8].

La introducción del operador de viscoelasticidad normal $\hat{\zeta}$, en el tensor de esfuerzos para el fluido viscoso compresible, condujo a resultados satisfactorios en el análisis del comportamiento de este medio ante una onda sonora de pequeña amplitud. El modelo propuesto permite obtener el comportamiento real de la velocidad de fase con la frecuencia directamente de las relaciones de dispersión, sin tener que recurrir a consideraciones fenomenológicas. El tratamiento aquí seguido es original en este aspecto.

REFERENCIAS

- A. Skelland, Non-Newtonian Flow and Heat Transfer, Edición Revolucionaria, Habana (1970).
- R. B. Bird, R.C. Amntrong, and O. Hassager, Dynamics of Polimeric Fluids Vol 1, Wiley, New York (1977).
- D. D. Joseph, Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids, Springer, New York (1990).
- J. Martinez, Informe Interno 5/91, Univ. Navarra
- O. Sotolongo, A. Vázquez y E. López, Rev. Ciencias Matemáticas 15, 13 (1994).
- J. Marín y O. Sotolongo, Rev. Cub. Fís. 11, 26 (1991).
- L. Samek, Czechoslovak J. of Phys. B33, 48 (1983).
- G. Gonzales y Z. Koslovski, Ciencias Técnicas Físicas y Matemáticas 10, 31 (1983).
- L. Landau y Lifchitz, Mecánica de los fluidos, Nauka, Moscú (1971).
- B. Agranat, Fundamentos de la Física y la Técnica de los ultrasonidos, Mir, Moscú (1987).
- J. Frenkel, Kinetic Theory of Liquids, Dover, New York (1955).