

# TEORIA DE DISEÑO DE ELECTROIMANES CON NUCLEO DE AIRE PARA RMN DE IMAGENES

Francisco Reguera Marcos, Alexis García Rodríguez, Facultad de Física, Universidad de Oriente

## RESÚMEN

Se expone el fundamento teórico del diseño de sistemas de bobinas cilíndricas que conforman diferentes configuraciones de electroimanes con núcleo de aire para generar campos magnéticos con diferentes grados de uniformidad. La teoría se basa en la solución de la ecuación de Laplace  $\Delta \phi = 0$  para el potencial escalar magnético  $\phi$ . Se optimizan las dimensiones de cuatro bobinas (doble par de Helmholtz) colocadas simétricamente respecto al origen de coordenadas.

## ABSTRACT

The theoretical fundament to design air core coil systems for generating magnetic field of different degree of uniformity is expoused. The theory is based on the solution of the Laplace equation  $\Delta \phi = 0$  for the scalar magnetic potential  $\phi$ . The coil dimensions of a double Helmholtz pair are optimized.

## INTRODUCCION

En la RMN de imágenes es imprescindible que la componente  $H_z(z,r)$  del campo magnético al que es sometido el paciente tenga un determinado grado de uniformidad ( $10^{-4}$ ... $10^{-6}$ ). Esta componente será la encargada de alinear por igual a los momentos magnéticos de los núcleos atómicos de la muestra a estudiar. En el presente trabajo se expone un método teórico para el cálculo de dicha componente  $H_z(z,r)$ , a partir de la cual se pueden optimizar las dimensiones y posiciones de sistemas de bobinas cilíndricas de modo que esta componente alcance diferentes grados de uniformidad, entre ellos, los requeridos para obtener imágenes por RMN.

## FUNDAMENTO TEORICO:

Partiremos de la ecuación de Laplace para el potencial escalar magnético:

$$\Delta \phi = 0 \quad (1)$$

y buscaremos su solución en regiones que no contengan fuentes de campo o corrientes. La solución de (1) en dichas regiones expresada en coordenadas esféricas e incluyendo el origen de coordenadas viene dada por [1]:

$$\phi = \sum_i A_i r^i P_i(\cos\theta) \quad (2)$$

$P_i(\cos\theta)$ : Polinomio de Legendre de grado  $i$

$\theta, r$ : coordenadas esféricas del punto de observación.

La intensidad del campo magnético se obtiene a partir del gradiente del potencial (2), esto es

$$H(r,\theta) = -\nabla \phi(r,\theta) = (-\partial\phi/\partial r, -1/r \partial\phi/\partial\theta) \quad (3)$$

donde

$$H_r = \sum A_L L r^{L-1} P_L(\cos\theta)$$

$$H_\theta = \sum A_L L r^{L+1} P_L(\cos\theta) \sin\theta \quad (4)$$

para un solenoide que contenga  $n$ -espiras por unidad de longitud, radio  $R$  y longitud  $L$  (Fig. 1), la componente  $H_z(r, \theta)$  en coordenadas cilíndricas está dada por

$$H_z = H_r \cos\theta - H_\theta \sin\theta \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5) y considerando que  $r^2 = z^2 + \rho^2$ ,  $\sin\theta = \rho/r$  y  $\cos\theta = z/r$ , obtenemos

$$H_z(z, \rho) = -\sum A_L (z^2, \rho^2)^{(L-1)/2} [P_L(\cos\theta) - \cos\theta P_L'(\cos\theta)] \quad (6)$$

Solo nos falta determinar los coeficientes  $A_L$  de (6). El potencial escalar magnético en el eje del solenoide viene dado por [2]

general para determinar los coeficientes  $A_L$ , esto es

$$\sum_L (1/L!) \phi^{(L)}(O) z^L = \sum_L A_L z^L \quad (9)$$

de donde vemos que

$$A_L = (1/L!) \phi^{(L)}(O) \quad (10)$$

Para obtener los coeficientes correspondientes a un solenoide cuyo enrollado sea de sección transversal rectangular, tenemos que sumar los aportes de la corriente a la intensidad del campo en la dirección radial (Fig. 2), es decir tenemos que integrar en  $r$  los coeficientes obtenidos en [2] para el solenoide

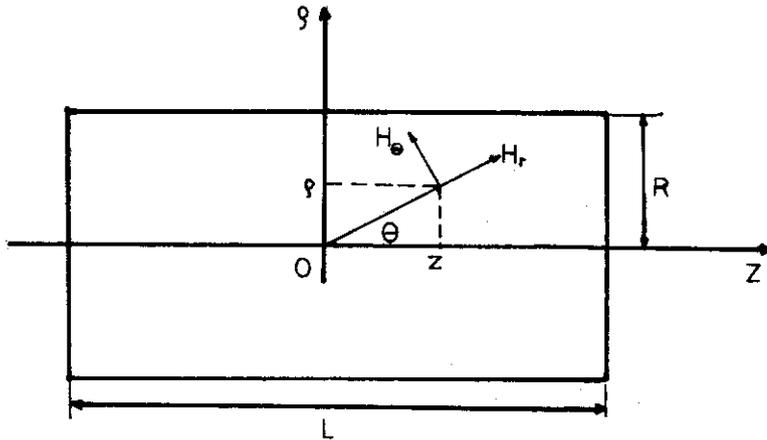


Figura 1 :Componentes del campo magnético dentro de un solenoide en coordenadas esféricas.

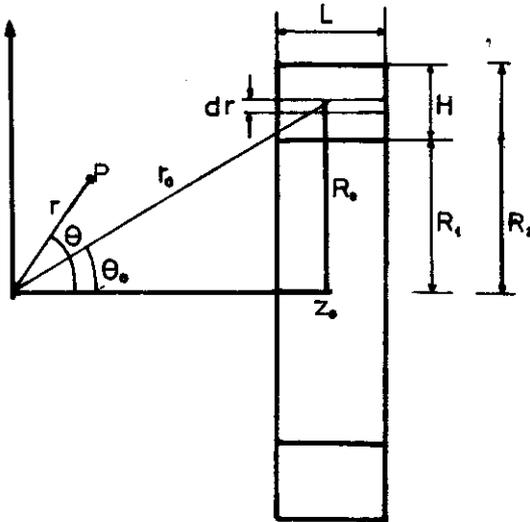


Figura 2: Solenoide de sección transversal rectangular y origen de coordenadas desplazado.

$$\Phi_m(z, z') = (\mu_0 N v I / 2L) \left[ L + \left\{ (z-L/2)^2 + R^2 \right\}^{1/2} - \left\{ (z+L/2)^2 + R^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (7)$$

donde  $R$  es el radio del solenoide,  $L$  su longitud y  $Nv$  el número de vueltas. Haciendo un desarrollo de  $\phi(z)$  en torno al origen ( $z=0$ ) se obtiene

$$\phi(z) = \phi(z=0) + z\phi'(z=0) + (z^2/2!) \phi''(z=0) + \dots + \sum (1/L!) \phi^{(L)}(O) z^L \quad (8)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (8) para puntos sobre el eje  $z$ , obtenemos una expresión

$$A_L(L, R_1, R_2) = \int_{R_1}^{R_2} (1/L!) \phi^{(L)}(O) dr \quad (11)$$

Como nos interesa estudiar el campo generado por sistemas de bobinas situadas simétricamente respecto a un origen común, entonces desplazamos el origen de coordenadas al punto "o" como se muestra en la Figura (2). Por las mismas razones de simetría que en el caso del solenoide, solo los coeficientes impares no se anularán. Los coeficientes que se obtienen a través de (11) considerando el origen desplazado a una distancia  $Z_0$  son los siguientes

$$A_1(z) = \frac{\mu_0 I N v N c}{2LH} \left\{ (z_0 + L/2) \ln \left[ \frac{R_2^2 + \{(z_0 + L/2)^2 + R_2^2\}^{1/2}}{R_1^2 + \{(z_0 + L/2)^2 + R_1^2\}^{1/2}} \right] - \right. \quad (12)$$

$$\left. -(z_0 - L/2) \ln \left[ \frac{R_2^2 + \{(z_0 - L/2)^2 + R_2^2\}^{1/2}}{R_1^2 + \{(z_0 - L/2)^2 + R_1^2\}^{1/2}} \right] \right\}$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 I N v N c}{12LH} \left\{ \frac{R^3 \{(z_0 + L/2)^2 + R^2\}^{-3/2}}{z_0 + L/2} - \frac{R^3 \{(z_0 - L/2)^2 + R^2\}^{-3/2}}{z_0 - L/2} \right\}_{R_1}^{R_2} \quad (13)$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 N v N_f}{16 H} \left[ -3 \left[ \frac{R_2}{(Z_0 + L/2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{\{(Z_0 + L/2)^2 + r^2\}^{-7/2}} \right] - \right.$$

$$\left. \frac{R_2}{(Z_0 + L/2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{\{(Z_0 + L/2)^2 + r^2\}^{-7/2}} \right] + 7 \left[ \frac{R_2}{(Z_0 + L/2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{\{(Z_0 + L/2)^2 + r^2\}^{-9/2}} \right] \quad (14)$$

$$\left. \frac{R_2}{(Z_0 + L/2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{\{(Z_0 + L/2)^2 + r^2\}^{-9/2}} \right]$$

etc.

Las integrales que aparecen se pueden reducir a una primaria utilizando la fórmula recursiva:

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{(r^2 + Z^2)^{p+1}} dr = -\frac{r^2}{2i(p+1)} \Big|_{R_1}^{R_2} + \frac{2p+5}{2i(p+1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{(r^2 + Z^2)^p} dr$$

Sustituyendo estos coeficientes (12)...(14) en la expresión (6), obtenemos la componente  $H_z(z, \rho, Z_0, R_0, H, L)$  de la intensidad del campo magnético producido por  $p$ -pares de solenoides de sección rectangular colocados simétricamente respecto al origen

$$H_z(z, \rho) = -p \left\{ \sum_{i=1}^p A_i - (3/2) \sum_{i=1}^p A_i (2z^2 + \rho^2) - (1/8) \sum_{i=1}^p A_i (4z^4 - 12z^2 \rho^2 + 15\rho^2) - \sum_{i=1}^p A_i (112z^6 - 84z^4 \rho^2 + 63z^2 \rho^4 - 35\rho^6) \right\} \quad (15)$$

## OPTIMIZACION DE LAS DIMENSIONES DE LAS BOBINAS

El grado de uniformidad del campo que se genera dependerá de la cantidad de coeficientes de (15) que se consignan anular para una distribución de bobinas determinadas. Si logramos anular el término  $A_3$ , diremos que hemos logrado un campo compensado hasta cuarto orden, ya que la cuarta potencia es la próxima que aparece en el desarrollo (15), una vez anulado el término  $A_3$ . Este razonamiento es válido para potencias de órdenes superiores.

Comencemos nuestro análisis con el coeficiente  $A_3$  (para  $p = 1$ ), el cual podemos escribir de la siguiente forma:

$$A_3 = [F(R_2, Z_1) - F(R_1, Z_1)] - [F(R_2, Z_2) - F(R_1, Z_2)] \quad (16)$$

donde  $F(R, Z) = R^3(Z^2 + R^2)^{-3/2} / Z$ ,  $R_2 = R_0 + H/2$ ,  $R_1 = R_0 - H/2$ ,

$Z_2 = Z_0 + L/2$ ,  $Z_1 = Z_0 - L/2$ ;  $Z_0$  es la distancia del origen al centro de la bobina y  $R_0$  es el radio al centro del carrete medido a partir del eje de simetría (Fig. 2). Cada uno de los términos en (16), es una función de dos variables, la cual podemos desarrollar en serie de Taylor en un entorno del origen, si consideramos que las dimensiones del enrollado son mucho mayores que su distancia al centro del sistema, es decir  $R_0 \gg H/2$ ,  $Z_0 \gg L/2$ .

$$F(R, Z) = \sum^n (1/L) \left[ (L/2) \partial / \partial Z_0 + (H/2) \partial / \partial R_0 \right] F(Z_0, R_0) = F(Z_0, R_0) +$$

$$(L/2) \left[ \partial F(Z_0, R_0) / \partial Z_0 \right] + (H/2) \left[ \partial F(Z_0, R_0) / \partial R_0 \right] +$$

$$(1/2!) \left\{ (L/2)^2 \left[ \partial^2 F(Z_0, R_0) / \partial Z_0^2 \right] + (H/2)^2 \left[ \partial^2 F(Z_0, R_0) / \partial R_0^2 \right] + \right.$$

$$\left. 2(H/2)(L/2) \left[ \partial^2 F(Z_0, R_0) / \partial Z_0 \partial R_0 \right] \right\} + (1/3!) \left\{ (L/2)^3 \left[ \partial^3 F(Z_0, R_0) / \partial Z_0^3 \right] + \right.$$

$$\left. + (H/2)^3 \left[ \partial^3 F(Z_0, R_0) / \partial R_0^3 \right] + 3(H/2)^2 (L/2) \left[ \partial^3 F(Z_0, R_0) / \partial Z_0^2 \partial R_0 \right] + \right.$$

$$\left. + 3(L/2)^2 (H/2) \left[ \partial^3 F(Z_0, R_0) / \partial Z_0 \partial R_0^2 \right] \right\} + \dots \quad (17)$$

Aplicando este desarrollo a cada uno de los términos de (16) se obtiene que solo las derivadas con potencias impares de  $L/2$  y  $H/2$  son las que no se anulan. De este modo resulta para cada uno de los coeficientes

$$A_3 = F_{R_0 Z_0} + (1/24) \{ H^2 F_{R_0^3 Z_0} + L^2 F_{R_0 Z_0^3} \} + \dots \quad (18)$$

$$A_5 = F_{RoZo} + (1/24) \{ H^2 F_{Ro^3 Zo} + L^2 F_{RoZo^3} \} + \dots \quad (19)$$

$$A_7 = F_{RoZo} + (1/24) \{ H^2 F_{Ro^3 Zo} + L^2 F_{RoZo^3} \} + \dots \quad (20)$$

Las funciones  $F(R,Z)$  de cada uno de los coeficientes  $A_1, A_3, \dots$ , así como sus derivadas que aquí aparecen están desarrolladas en el anexo.

## DOBLE PAR DE HELMHOLTZ

Este es el caso de dos pares de bobinas ( $p=2$ ) colocadas simétricamente respecto al origen. La intensidad de campo magnético generado por este sistema está dado por

$$H_z(z, \rho) = 2 \left\{ -(A_1^{(1)} + A_1^{(2)}) - (3/2)(A_3^{(1)} + A_3^{(2)}) (2z^2 + \rho^2) - \dots \right. \\ \left. + (0.991/8)(A_5^{(1)} + A_5^{(2)}) (40z^4 - 120z^2 \rho^2 + 15\rho^4) - \dots \right. \\ \left. - (1/16)(A_7^{(1)} + A_7^{(2)}) (112z^6 - 840z^4 \rho^2 + 630z^2 \rho^4 - 35\rho^6) - \dots \right\} \quad (21)$$

A continuación trataremos de anular tantos términos de los coeficientes  $(A_3^{(1)} + A_3^{(2)})$ ,  $(A_5^{(1)} + A_5^{(2)})$ , etc. como sea posible. Los supraíndices (1), (2) se refieren a las bobinas externas e internas respectivamente. Fijémonos en el primer término  $F_{RoZo}$  del desarrollo de  $A_5$  en (19). Este resulta ser un polinomio son dos raíces positivas que son  $Ro/Zo$   $= \sqrt{6 \pm \sqrt{28}}$ .

Ahora nos valemos de este resultado para fijar la relación entre posición y radio de las bobinas de modo que esto haga que se anule automáticamente parte del coeficiente  $(A_5^{(1)} + A_5^{(2)})$ . De aquí que los ángulos bajo los cuales se ven los centros de los enrollados de ambas bobinas son  $\theta_0^{(1)} = 40.01^\circ$ , y  $\theta_0^{(2)} = 73.4^\circ$ . Estas raíces anulan también la derivada  $F_{Ro^3 Zo}$  del coeficiente  $A_3$  que acompaña a  $L^2$  (ver anexo). Entonces nos queda

$$A_3^{(1)} + A_3^{(2)} = N_1 \left[ F_{RoZo}^{(1)} + (1/24) H_1^2 F_{RoZo^3}^{(2)} \right] \quad (22)$$

$$+ N_2 \left[ F_{RoZo}^{(2)} + (1/24) H_2^2 F_{RoZo^3}^{(2)} \right]$$

$$A_5^{(1)} + A_5^{(2)} = N_1 \left[ H_1^2 F_{RoZo^3}^{(1)} + L_1^2 F_{RoZo^3}^{(1)} \right] + N_2 \left[ H_2^2 F_{RoZo^3}^{(2)} + L_2^2 F_{RoZo^3}^{(2)} \right] \quad (23)$$

La relación entre los números de vueltas de las bobinas la elegimos a partir de (23), de forma tal que  $N_1 F_{RoZo}^{(1)} + N_2 F_{RoZo}^{(2)} = 0$  de donde se obtiene

$$N_1 / N_2 = - F_{RoZo}^{(1)} / F_{RoZo}^{(2)} = 0.682 \quad (24)$$

Del término restante de (23) hallamos la relación entre las alturas de los enrollados de ambas bobinas

$$H_1 / H_2 = \left\{ -(N_2 / N_1) \left[ F_{RoZo^3}^{(2)} / F_{RoZo^3}^{(1)} \right] \right\}^{1/2} = 0.672 \quad (25)$$

Hemos supuesto la misma distancia  $r_0$  (figura 2) del origen al centro del enrollado de cada bobina. Si tomamos la misma densidad de espiras en cada uno de los enrollados, entonces podemos determinar la relación entre los anchos de los carretes según

$$L_2 / L_1 = (N_2 / N_1) (H_1 / H_2) = 1.05 \quad (26)$$

Esta relación lleva implícita la suposición de que se enrollan ambas bobinas con el mismo alambre.

El procedimiento expuesto permite anular el coeficiente  $A_3^{(1)} + A_3^{(2)}$  de la potencia  $Z^2$  del desarrollo (21), así como parte de  $A_5^{(1)} + A_5^{(2)}$ . Podríamos anular completamente este último término hallando la relación  $L_2 / L_1$  de (23), lo cual implicaría utilizar conductores de diferente sección transversal para el enrollado de las bobinas.

De esta forma podemos decir que el doble par de Helmholtz genera un campo de sexto orden de compensación. Fijando los parámetros  $R_0, Z_0, N_v, H$  y  $L$  de una de las bobinas, obtenemos los parámetros correspondientes de la otra por medio de las relaciones (24) a la (28), quedando así diseñado un sistema de cuatro bobinas, capaz de generar un campo de sexto orden de compensación, en el sentido aclarado anteriormente.

## CONCLUSIONES

El método expuesto permite obtener la expresión de la componente  $H_z(z,0)$  de la

intensidad del campo magnético generado por pares de bobinas concéntricas colocadas simétricamente respecto al origen de coordenadas. Los resultados obtenidos coinciden con los reportados en la literatura [3]. La ventaja de el método teórico aquí expuesto consiste en su sencillez, ya que solo con operaciones matemáticas de derivación e integración se obtienen los mismos resultados que en [3], sin tener que recurrir al trabajo con funciones especiales. El trabajo sirve de base además para el diseño de otras configuraciones, igualando la p de (15) al número de pares de bobinas de la configuración a estudiar y procediendo a eliminar la mayor cantidad de términos que sea posible del desarrollo de  $H_z$  que se obtenga. Agradecemos al Dr. R. Riera por su colaboración en la revisión del trabajo.

## ANEXO

I. Primeros términos de las expresiones de los coeficientes del desarrollo del campo, que portan la información sobre las dimensiones de los enrollados.

$$A_3: F(R,Z) = R^3(Z^2+R^2)^{-3/2}/Z$$

$$F_{RZ} = \partial F / \partial R \partial Z = (Z^2+R^2)^{-7/2} [R^4 - 4Z^2R^2]$$

$$F_{RZ^3} = \partial^3 F / \partial R \partial^3 Z = -45R^2(Z^2+R^2)^{-11/2} [R^4 - 12Z^2R^2 + 8Z^4]$$

$$F_{RZ^3} = \partial^4 F / \partial R^3 \partial Z = 3R^2(Z^2+R^2)^{-11/2} [12R^6 - 159Z^2R^4 + 136Z^4R^2 - 8Z^6]$$

$$A_5: F(R,Z) = \left\{ R^3(Z^2+R^2)^{-5/2} / 5 Z \right\} + (2/15)(R/Z)^3(Z^2+R^2)^{-3/2}$$

$$F_{RZ} = \partial F / \partial R \partial Z = -3R^2(Z^2+R^2)^{-3/2} [R^4 - 12Z^2R^2 + 8Z^4]$$

$$F_{RZ^3} = \partial^4 F / \partial R \partial^3 Z = -21R^2(Z^2+R^2)^{-15/2} [-5R^6 + 120Z^2R^4 - 240Z^4R^2 + 64Z^6]$$

$$F_{RZ^3} = \partial^4 F / \partial R^3 \partial Z = -3(Z^2+R^2)^{-15/2} [30R^8 - 755R^6Z^2 + 1650Z^4R^4 - 552Z^6R^2 + 16Z^8]$$

$$A_7: F(R,Z) = 5R^2(Z^2+R^2)^{-9/2} - 30R^2Z^3(Z^2+R^2)^{-11/2} + 33R^2Z^5(Z^2+R^2)^{-13/2}$$

$$F_{RZ} = \partial F / \partial R \partial Z = -R^2(Z^2+R^2)^{-15/2} [-5R^6 + 120Z^2R^4 - 240Z^4R^2 + 64Z^6]$$

## II. Relación del número de vueltas

$$F_{RZ} = \partial F / \partial R \partial Z = (Z^2+R^2)^{-7/2} [R^4 - 4Z^2R^2], \text{ haciendo } X = R/Z$$

$$F_{RoZo} = \frac{2}{x} \frac{2}{x} (x^2 - 4)(1+x)^{-2-3} \frac{2}{r_0} \frac{2}{r_0} = \frac{2}{r_0} \frac{2}{r_0}$$

$$N_1/N_2 = \left[ \frac{F_{RoZo}^{(1)}}{F_{RoZo}^{(2)}} \right] = \frac{2}{x_1} \frac{2}{x_1} (x_1^2 - 4)(1+x_1)^{-2-2} / \frac{2}{x_2} \frac{2}{x_2} (x_2^2 - 4)(1+x_2)^{-2-2} = 0.62$$

$x_{1,2}^2 = 6 \pm \gamma 28$  son las raíces del polinomio  $F_{RZ}$  correspondiente al coeficiente  $A_5$ . Hemos supuesto los centros de los enrollados de cada bobina colocados sobre una esfera de radio  $r_0$ .

## REFERENCIAS

- [1] CLERK MAXWELL, J.: Treatise on Electricity and Magnetism.
- [2] REGUERA, F.; A. GARCIA: Campo magnético de un solenoide.
- [3] FRANZEN, W. (1932): Rev. Sci. Instr. 9, 933/8.
- [4] JACKSON, J.D. (1962): Classical Electrodynamics (New York: Wiley).
- [5] LANDAU, L.D. (1971): Klassische Feldtheorie (Akademie-Verlag, Berlin).
- [6] MONTGOMERY, D.B. (1969): Solenoid Magnet Design (New York: Wiley).
- [7] ROCARD, Y.: Principles of Electricity and Magnetism.
- [8] GARRET, M.W. (1967): J. Appl. Phys., 38, 2563/85.
- [9] McKEEHAN, L.W. (1936): Rev. Sci. Insts. 7, 150/3.
- [10] ATTWOOD, S. (1948): Electric and Magnetic Fields (New York: Wiley).
- [11] ABRAMOWITZ, M. and I.A. STEGUN (1965): Handbook of Mathematical Functions (New York: Dover).

# TRANSPORTE POR VARIAS SUBBANDAS EN UN POZO CUANTICO

Héctor León Ramírez, Departamento de Física, ISPJAE, La Habana, Cuba

## RESUMEN

En el marco del formalismo de la Ecuación de Boltzman para el Transporte se emplea un procedimiento general para el cálculo de los tiempos de relajación y la movilidad para un gas electrónico quasibidimensional, sea en una heteroestructura simple o en un pozo cuántico, cuando varias subbandas se encuentran ocupadas. Se destacan las limitaciones de cálculos presentados anteriormente. Se ofrecen resultados numéricos para ilustrar el papel de la dispersión intersubbanda.

## ABSTRACT

The Boltzmann Transport Equation formalism is employed in a general procedure to calculate relaxation times and mobility of a quasi-two-dimensional electron gas, both in a single heterostructure and in a quantum well, when several subbands are occupied. Limitations of earlier calculations are pointed out. Numerical results illustrate the role of intersubband scattering.

En el estudio de las propiedades de un gas electrónico quasibidimensional (Q2D) el transporte por varias subbandas ha sido tratado tanto en el formalismo cuasiclásico de la ecuación de Boltzmann (BTE) [1-9] como en el formalismo cuántico de la ecuación de Kadanoff-Baym (KBA) [10-12]. Sin embargo, el desarrollo teórico ha estado limitado principalmente por la consideración casi exclusiva de mecanismos de dispersión elástica [1-7,10-12] y el uso casi siempre de la estadística para alta degeneración del gas electrónico [1-8]. Por otra parte, en los pocos cálculos numéricos llevados a cabo el apantallamiento de las interacciones ha sido obviado [10] o considerado de manera no muy clara [2,3,5-8,11,12]. El tratamiento de la dispersión electrónica por fonones ópticos polares (LO) ha sido con modelos muy sencillos [8-9] ya desechados en la actualidad. La influencia de las transiciones intersubbandas en el transporte ha sido revelada experimentalmente [13,14] y continua siendo de interés para la fabricación de dispositivos semiconductores de alta rapidez de respuesta.

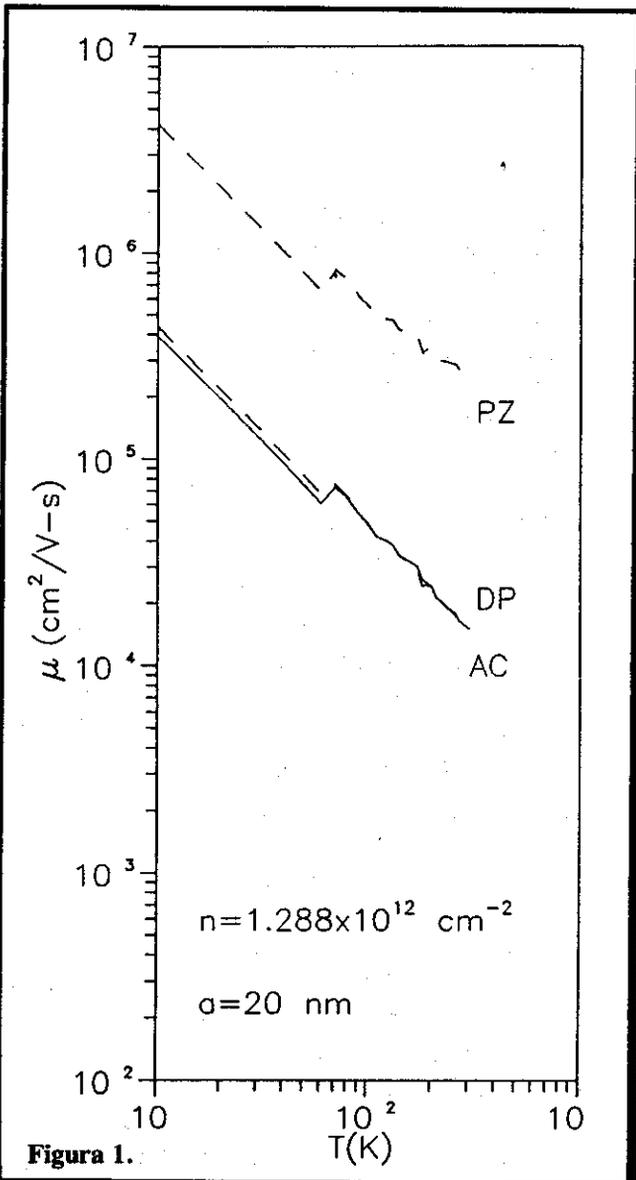
El problema del cálculo de la movilidad en una heteroestructura semiconductor Q2D con dopaje modulado es el principal a resolver al

estudiar el transporte. En los formalismos BTE y KBA se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas por las llamadas integrales de choque. Para campos débiles se puede usar la aproximación del tiempo de relajación (RT), obteniéndose un sistema de ecuaciones para determinar los RT correspondientes a cada subbanda y, una vez obtenidos, calcular la movilidad. Los detalles de este procedimiento aparecen en un trabajo anterior [15], donde se justifica plenamente el concepto de RT para la dispersión por fonones LO y se utiliza un método iterativo para su cálculo, requerido con independencia de que además esté presente la dispersión por el potencial de deformación (DP) y el piezoelectrico (PZ) de las ramas acústicas. [16]

En el presente trabajo presentamos los resultados numéricos para un pozo cuántico de ancho  $a=20$  nm en aproximación de dos subbandas. Se utilizaron las funciones envolventes correspondientes a barreras infinitas en las intercaras y los parámetros del GaAs [16]. Se tuvieron en cuenta los mecanismos DP y PZ, que al actuar simultáneamente dan la dispersión por fonones acústicos (AC). El apantallamiento de las interacciones complica los cálculos

analíticos y numéricos, por lo que se dejó para un trabajo ulterior, donde además se emplearán funciones envolventes obtenidas autoconsistentemente.

En la Figura 1 se muestra la dependencia de la movilidad con la temperatura para una concentración  $n=1.288 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ . El incremento brusco de la movilidad entre 60 y 70 K refleja la desconexión de las transiciones intersubbandas, debido a que el nivel de Fermi pasa a estar por debajo de la segunda subbanda. En la Figura 2 se muestra la dependencia de la movilidad con la concentración para una temperatura  $T=30\text{K}$ .



La caída brusca de la movilidad entre  $1.20$  y  $1.25 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  refleja la conexión de las transiciones intersubbandas, debido a que el nivel de Fermi pasa a estar por encima del fondo de la segunda subbanda. Este comportamiento hace prever oscilaciones semejantes a las de Shubnikov-De-Haas cada vez que el nivel de Fermi atraviese el fondo de una subbanda. Los cambios serán más o menos bruscos en la medida que el gas electrónico esté más o menos degenerado.

#### REFERENCIAS

- [1] SIGGIA, E.D. y P.C. KWOK (1970): Phys. Rev. B 2, 1024.
- [2] MORI, S y T. ANDO (1979): Phys. Rev. B 19, 6433.
- [3] \_\_\_\_\_ (1980): J. Phys. Soc. of Japan 48, 865.
- [4] ANDO, T.; A.B. FOWLER y F. STERN (1982): Rev. Mod. Phys. 54, 437.
- [5] FISHMAN, G. y D. CALECKI (1983): Phys. Rev. B 117-118, 744.
- [6] \_\_\_\_\_ (1984): Phys. Rev. B 29, 5778.
- [7] WALUKIEWICZ, W.; H.E. RUDA; J. LAGOWSKI y H.C. GATOS (1984): Phys. Rev. B 29, 4818.
- [8] \_\_\_\_\_ (1984): Phys. Rev. B 30, 4571.
- [9] DARLING, R.B. (1988): IEEE J. Quantum Electron. 24, 1628.
- [10] ZIEP, O.; M. SUHRKE y R. KEIPER (1986): Phys. Stat. Sol. (b) 134, 789.
- [11] PRATSCH, C. y M. SUHRKE (1988): Phys. Stat. Sol. (b) 149, 547.
- [12] \_\_\_\_\_ (1989): Phys. Stat. Sol. (b) 154, 315.
- [13] STORMER, H.L.; A.C. GOSSARD, W. WEIGMANN Y K. BALDWIN (1981): Appl. Phys. Lett. 39, 912.

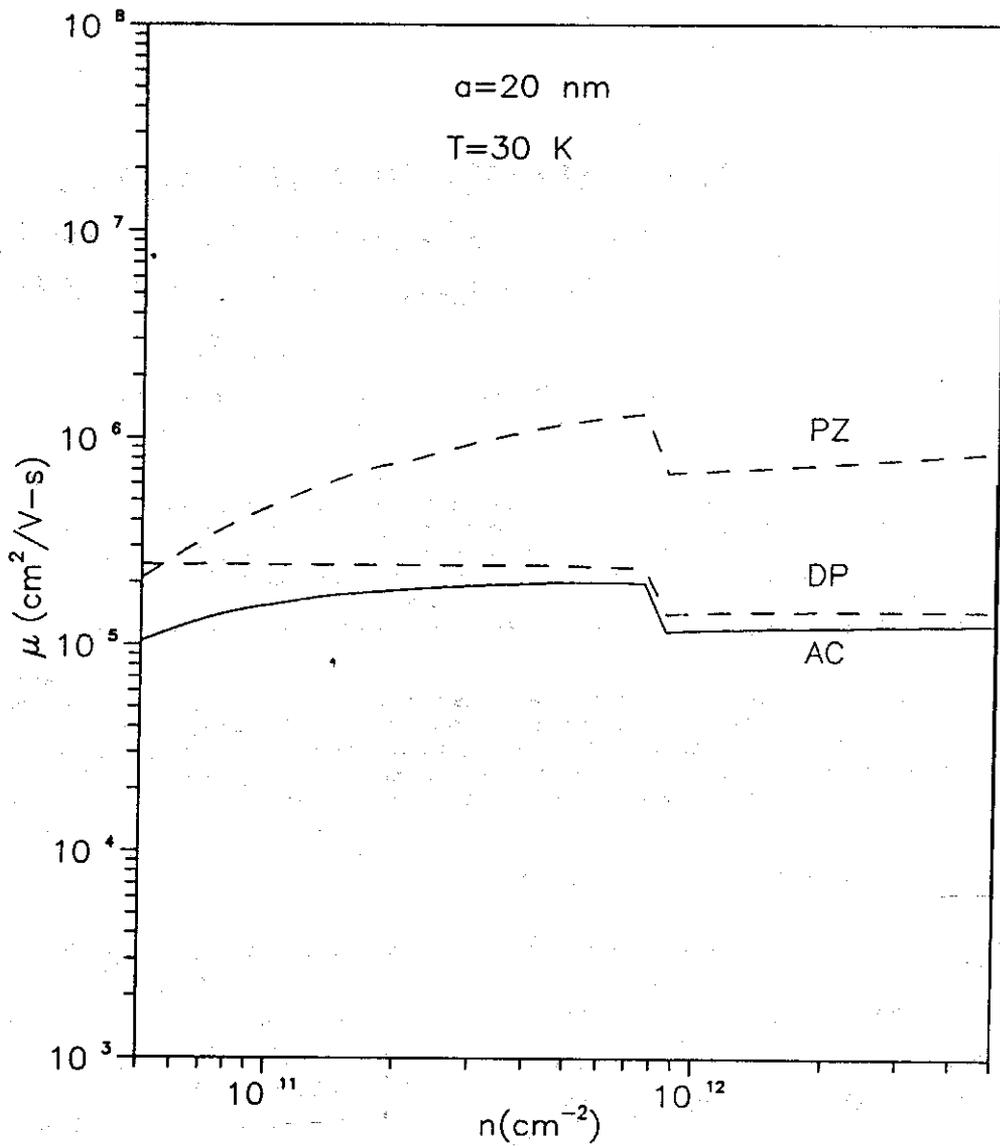


Figura 2.

[14] STORMEN, H.L.; A.C. GOSSARD; W. WEIGMANN (1982): Solid State Commun. 41, 707.

[16] LEON, H.; F. LEON y F. COMAS (1992): Phys. Stat. Sol. (b) 170, 449.

[15] LEON, H. y F. COMAS (1990): Phys. Stat. Sol. (b) 160, 105.