

DOS MODELOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS EN EL INTERIOR DE UNA BAHIA

Lisbeth Núñez*, Manuel Tejera** y Angel Pérez*

* Grupo de Métodos Numéricos ICIMAF

** Departamento de Física, ISPJAE

RESUMEN

Usando el método de diferencias finitas, se resuelven las ecuaciones de aguas someras para una bahía de profundidad constante, considerando la tensión superficial causada por un campo de vientos constante y uniforme. Dos modelos fueron considerados: uno con un tratamiento curvilíneo de las fronteras que representan las líneas de la costa y otro con un procedimiento convencional. En este trabajo se muestra lo ventajoso de emplear coordenadas curvilíneas en estos casos, pues se eliminan puntos de difracción irreales y las condiciones de contorno se simplifican.

ABSTRACT

Using the finite difference method, the shallow water equations were solved taking like basin an idealized bay with constant depth and considering the surface stress caused by uniform constant wind field. Two models were considered: one with a curvilinear boundary treatment to represent the coastlines and other with a conventional stepwise procedure. The advantages of the employment of curvilinear coordinates were demonstrated in this paper because the unreal diffraction points were eliminated and the boundary conditions were simplified.

INTRODUCCION

La simulación de la dinámica de los mares costeros reviste especial interés para la humanidad, tanto para el control y estudio de sus acciones sobre el medio ambiente como para minimizar los daños que causan diversos fenómenos naturales en obras costeras. La acción de fuertes vientos sobre la superficie de los mares costeros puede provocar variaciones en su nivel de varios metros, siendo este el origen de inundaciones severas como las que periódicamente afectan a la ciudad de La Habana.

Modelos numéricos de estos fenómenos se reportan desde los años 50 [Keulegan, 1951] hasta nuestros días [Signori, 1992; Lardner, 1993], obteniéndose diversas metodologías para el cálculo y la predicción de la sobre elevación del nivel de la superficie marina.

En este trabajo nos proponemos simular la dinámica del mar en el interior de una bahía afectada por la acción de un campo de vientos uniforme, una de cuyas fronteras cerradas la define una línea de costa arbitraria. Los cálculos se realizarán para dos modelos precisamente diferenciados a partir de la forma en que se realiza la

aproximación discreta de la frontera curvilínea. Para el Modelo 1 se realiza una aproximación convencional mientras que en el Modelo 2 se adoptan coordenadas curvilíneas ajustadas a la línea de la costa.

Se muestra lo ventajoso de emplear coordenadas curvilíneas, pues se eliminan puntos de difracción irreales y las condiciones de contorno se simplifican. Precedentes de este enfoque se han reportado. [Johns, 1981]

MODELO NUMERICO

• Ecuaciones básicas

Las ecuaciones empleadas constituyen una simplificación de las conocidas ecuaciones de aguas someras [Friedrichs, 1948], a las que le han sido eliminados los términos no lineales de la aceleración advectiva, así como los de la fricción viscosa lateral.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau_x^s - \tau_x^f}{\rho H} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\tau_y^s - \tau_y^f}{\rho H} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

En el sistema de ecuaciones u y v representan las componentes horizontales de la velocidad V en la dirección de los ejes x y y , respectivamente; ξ representa la variación del nivel del mar respecto a su estado de equilibrio estático; ρ es la densidad del agua de mar; f es el parámetro de Coriolis y H es la profundidad del acuatorio, τ^s y τ^f son las tensiones provocadas por el viento en la superficie del mar y entre el mar y el fondo, respectivamente: $\tau^s = \rho_a C/W$ y $\tau^f = \rho R V$.

La modelación se realizó en el interior de una bahía cuya frontera lateral la define la curva $b(y)$ de la semicircunferencia.

$$b(y) = R - \sqrt{R^2 - (y - R)^2}$$

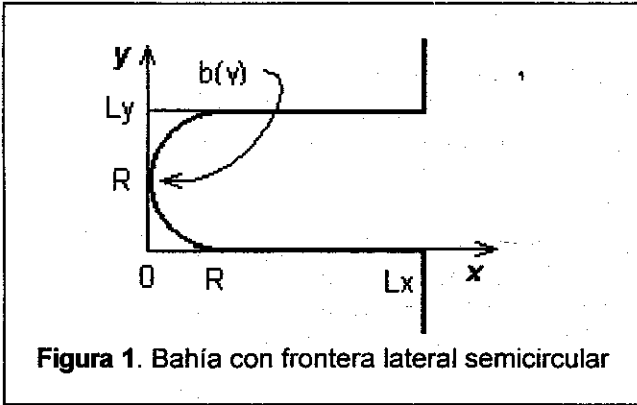


Figura 1. Bahía con frontera lateral semicircular

Se asume que:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \xi(x, y, 0) = 0.$$

Como condiciones de contorno:

$$v(x, 0, t) = v(x, Ly, t) = 0 \quad \text{para } x = (R, Lx)$$

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) b'(y) \quad \text{para } x = b(y)$$

$$u(Lx, y, t) = \xi(Lx, y, t) \sqrt{g/H}$$

• Esquema en Diferencias 1

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} - f v_{i,j}^k = -g \frac{\xi_{i,j}^k - \xi_{i-1,j}^k}{\Delta x} + \frac{\tau_x^s}{\rho H} - \frac{R u_{i,j}^k}{H} \quad (4)$$

$$\frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t} + f u_{i,j}^k = -g \frac{\xi_{i,j+1}^k - \xi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \frac{\tau_y^s}{\rho H} - \frac{R v_{i,j}^k}{H} \quad (5)$$

$$\frac{\xi_{i,j}^{k+1} - \xi_{i,j}^k}{\Delta t} + H \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{\Delta x} + H \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j}^{k+1}}{\Delta y} = 0 \quad (6)$$

Se usó una malla con $\Delta x = \Delta y = 2 \text{ km}$ y $\Delta t = 1 \text{ s}$.

MODELO NUMERICO 2

• Transformación de coordenadas para las ecuaciones básicas

Se introduce la siguiente transformación:

$$\eta = \frac{(x - b(y)) L_x}{L_x - b(y)}, \text{ con la cual se produce un mapeo}$$

del área de la bahía de frontera semicircular al de una de forma rectangular. Obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones para $u(\eta, y, t)$, $v(\eta, y, t)$ y $\xi(\eta, y, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -g \frac{L_x}{L_x - b(y)} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\tau_x^s}{\rho H} - \frac{R u}{H} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{b'(y)(\eta - L_x)}{L_x - b(y)} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\tau_y^s}{\rho H} - \frac{R v}{H} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{H L_x}{L_x - b(y)} \frac{\partial u}{\partial \eta} + H \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{H b'(y)(\eta - L_x)}{L_x - b(y)} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (9)$$

Manteniéndose las condiciones iniciales del modelo anterior y con las siguientes condiciones de contorno:

$$u(0, y, t) = v(\eta, 0, t) = v(\eta, Ly, t) = 0 \text{ y } u(L, \eta, y, t) = \xi(Lx, y, t) \sqrt{g/H}.$$

• Esquema en Diferencias 2

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} - f v_{i,j}^k = -g \frac{L_x}{L_x - b_j} \frac{\xi_{i,j}^k - \xi_{i-1,j}^k}{\Delta \eta} + \frac{\tau_x^s}{\rho H} - \frac{R u_{i,j}^k}{H} \quad (10)$$

$$\frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t} + f u_{i,j}^k = -g \frac{\xi_{i,j+1}^k - \xi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \frac{b_j(\eta - L_x)}{L_x - b_j} \frac{\xi_{i,j}^k - \xi_{i-1,j}^k}{\Delta \eta} + \frac{\tau_y^s}{\rho H} - \frac{R v_{i,j}^k}{H} \quad (11)$$

$$\frac{\xi_{i,j}^{k+1} - \xi_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{H L_x}{L_x - b_j} \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{\Delta \eta} + H \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j}^{k+1}}{2\Delta y} - \frac{H b_j(\eta - L_x)}{L_x - b_j} \frac{v_{i+1,j}^{k+1} - v_{i,j}^{k+1}}{\Delta \eta} = 0 \quad (12)$$

Se usó una malla con $\Delta\eta = \Delta y = 2$ km y $\Delta t = 1$ s .

• Bahía rectangular

Tanto en las ecuaciones transformadas (7) - (9), como en sus equivalencias discretizadas (10) - (12), no se ha especificado la forma de la curva $b(y)$, generalización que se conserva en el procedimiento numérico. Gracias a esto podemos realizar el cálculo de la dinámica en el interior de una bahía rectangular, más simple que la de la bahía propuesta y cuyos resultados pueden ser analizados a modo de comprobación.

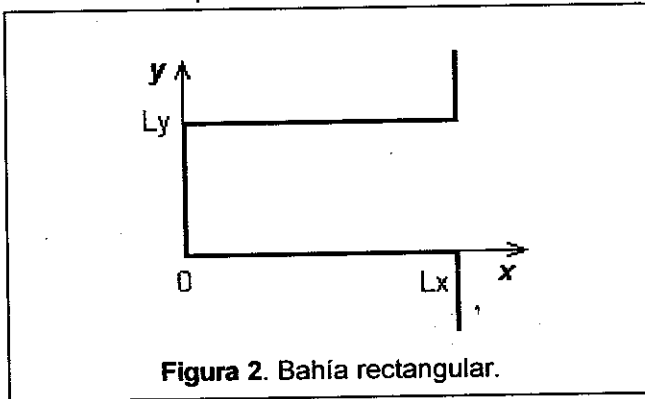


Figura 2. Bahía rectangular.

Es fácil ver que en este caso $b(y) = b'(y) = 0$, por lo que $\eta = x$ y las ecuaciones del Modelo 2 toman forma idéntica a las del Modelo 1.

Los resultados obtenidos para la bahía de 16 km de longitud y 10 km de ancho, con profundidad de 20 m, donde la velocidad del viento es de 10 m/s, soplando desde la entrada de la bahía hacia el extremo trasero de la misma, concuerdan con lo esperado.

Atendiendo a las condiciones de aplicabilidad de las ecuaciones y a las escalas empleadas para su integración numérica, se obtuvo el comportamiento de la corriente de deriva provocada por el viento, así como el de las ondas largas que se generan y propagan durante todo el proceso.

La Figura número 3 muestra la excitación del nivel del mar medida en los puntos centrales tanto de la costa trasera de la bahía como de la abertura de la misma.

En estos gráficos se aprecia como el nivel del mar en la costa trasera comienza a elevarse como resultado de la acumulación del agua que transporta la corriente, mientras que en la entrada de la bahía se produce un efecto de vaciado, el cual desaparece al alcanzarse un estado estacionario. Al cabo de media hora de iniciado el proceso y establecido el equilibrio

dinámico, el nivel del mar en el fondo de la bahía ha tomado su valor máximo, alterado por la presencia de las ondas que allí se reflejan, en tanto en la abertura de la bahía el mar ha recobrado su valor original.

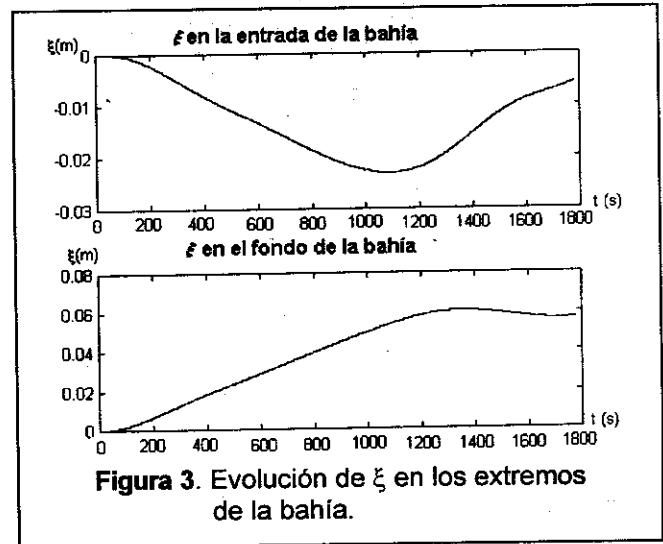


Figura 3. Evolución de ξ en los extremos de la bahía.

Las Figuras 4 y 5 muestran, respectivamente, el mapa de velocidades y el estado del nivel del mar en el interior de la bahía para $t = \frac{1}{2}$ hora. En este instante la distribución espacial de velocidades corresponde a la presencia de las ondas superficiales que en este estado estacionario son más perceptibles y que no solamente se propagan según la dirección del viento sino también en la perpendicular. El origen de este movimiento en la dirección perpendicular es el de la fuerza de Coriolis, presente en nuestro modelo y que causa una desviación en la dirección de la corriente con respecto a la del viento.

Las ondas que se propagan en la dirección limitada por los dos segmentos de costas laterales se establecen como ondas largas estacionarias o *seiche*.

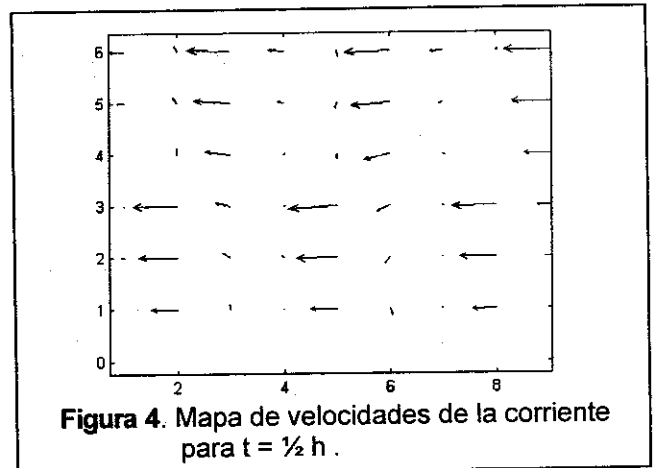


Figura 4. Mapa de velocidades de la corriente para $t = \frac{1}{2}$ h .

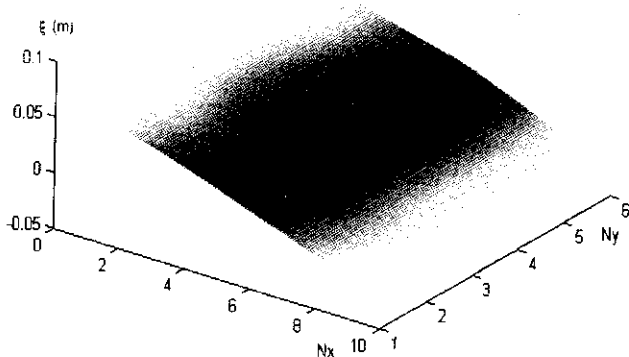


Figura 5. Nivel de la superficie marina para $t = \frac{1}{2} h$.

Esto se aprecia en la Figura 5, donde además de ser visible la pendiente que adquiere la superficie del mar, se puede observar la ligera ondulación de la onda *seiche*. Más claramente se observa este fenómeno en la Figura 6, donde se grafican los perfiles de la excitación del nivel del mar a lo largo de la costa trasera y de la entrada de la bahía.

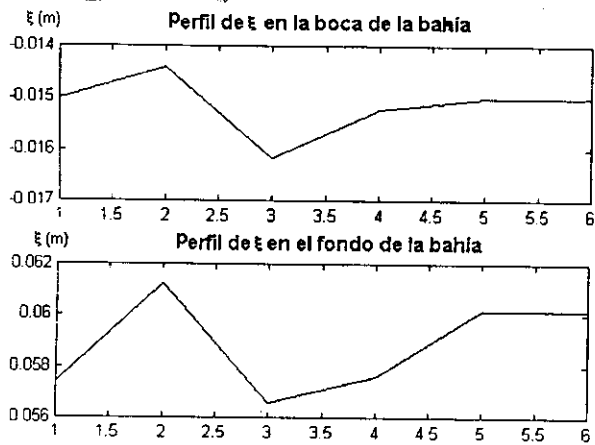


Figura 6. Perfil de ξ en los lados extremos de la bahía para $t = \frac{1}{2} h$.

Se realizó el cálculo numérico para la bahía unidimensional (muy estrecha), el cual concordó con la solución analítica.

EXPERIMENTOS NUMERICOS

Se realizaron los cálculos de la dinámica de la bahía para ambos modelos, fijando las dimensiones de la bahía en 16 km de longitud y 10 km de ancho, por lo que el radio de la semicircunferencia que define la frontera curvilínea fue de 5 km. La profundidad de la bahía se tomó de 20 m y el viento de 10 m/s, soplando desde la entrada de la bahía hacia el extremo trasero de la misma. Se presentan los mapas del vector velocidad de la corriente, así como gráficos ilustrativos del estado de la superficie

del mar para ambos modelos y al cabo de 10, 20 y 60 minutos del inicio de la acción del viento sobre la superficie del mar. También se muestran gráficas de la evolución temporal de ξ en los puntos medios de las fronteras abierta y cerrada posterior de la bahía.

• Modelo 1

El comportamiento de la dinámica en el interior de esta bahía es similar al de la bahía rectangular (Figura 7). En este caso la curva que define la costa

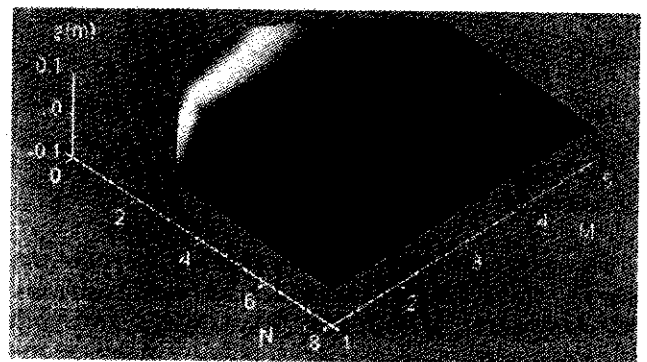
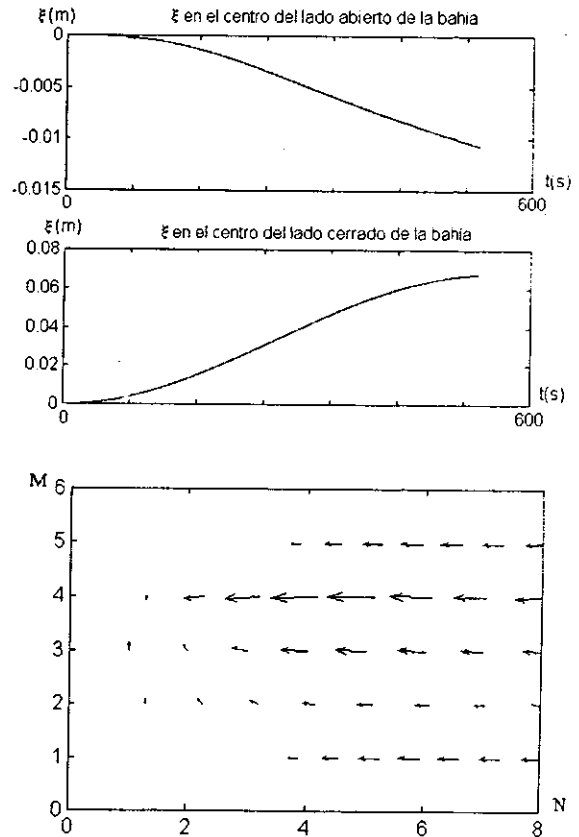


Figura 7. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 10$ min

trasera no es la línea recta, por lo que para este modelo los puntos sobre los que se realiza el cálculo numérico se eligen inscribiendo la figura de la bahía en un rectángulo reticulado. Al no coincidir la frontera curva con nodos del reticulado, se toman como puntos de la frontera discreta aquellos en los cuales $b(y)$ corte los segmentos paralelos al eje x . Esto origina modificaciones en las ecuaciones discretizadas sobre estos puntos y los adyacentes interiores.

Las Figuras 8 y 9, correspondientes al estado de la bahía transcurridos 20 y 60 minutos respectivamente, muestran detalles significativos. En la primera se aprecian puntos de difracción en la frontera debido a que esta se aproxima por medio de segmentos de recta perpendicular y aparecen vértices rectangulares. Además, se pueden observar indicios de una divergencia en los resultados numéricos, como más claramente se ve en el gráfico de la evolución de ξ en la Figura 9.

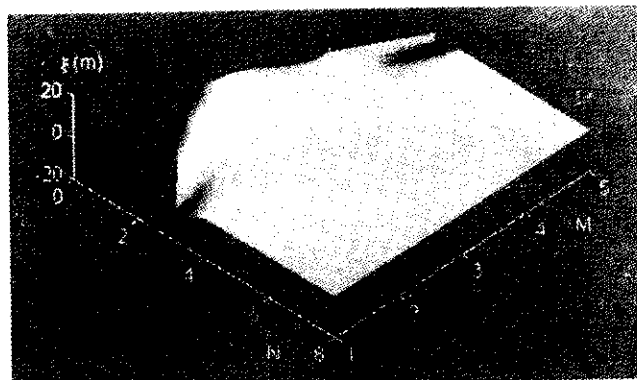
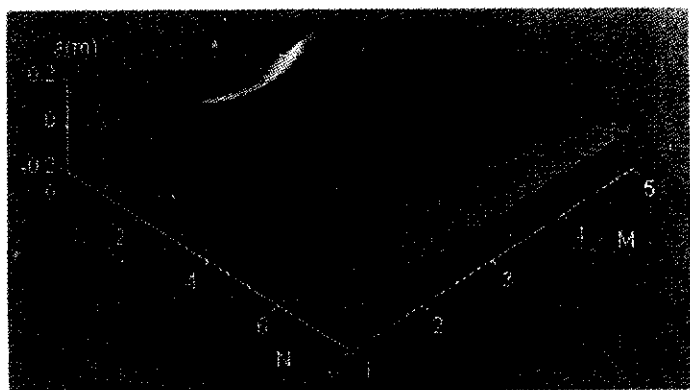
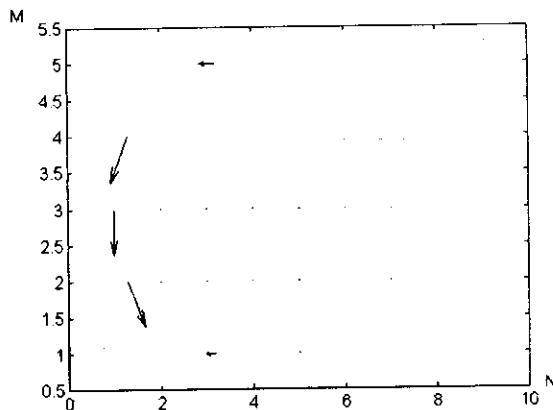
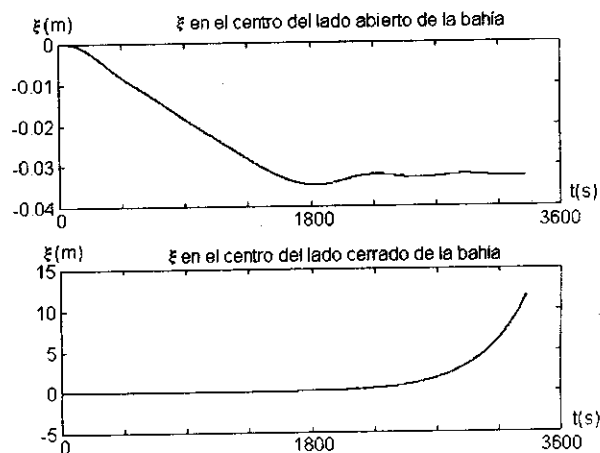
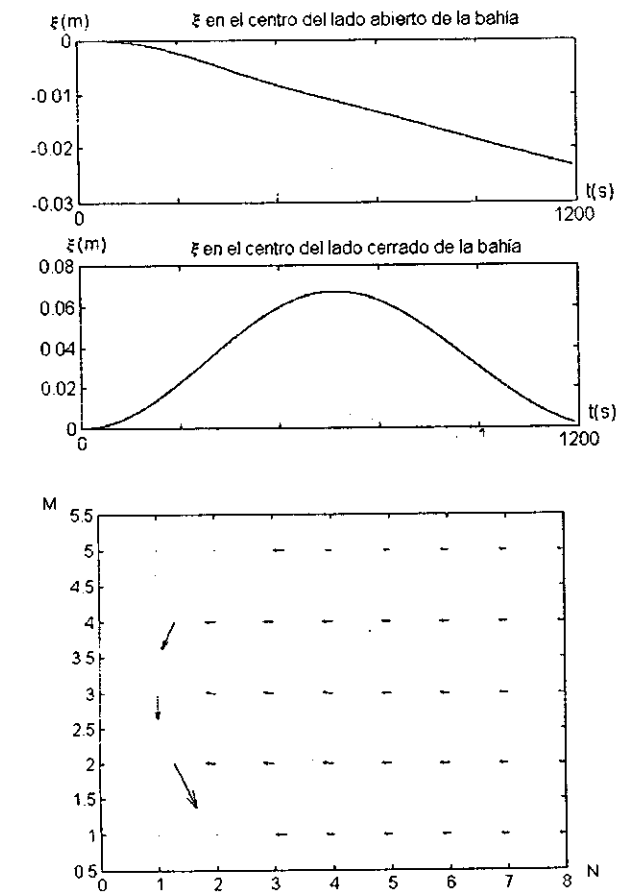


Figura 8. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 20$ min .

Figura 9. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 60$ min .

• **Modelo 2**

En este modelo, el empleo del reticulado uniforme luego de realizar la transformación de coordenadas descrita, resulta equivalente a aplicar la malla a un dominio rectangular. Esto trae ventajas, no solo en la simplificación de las condiciones de contorno sobre la frontera trasera, sino desde el punto de vista numérico, pues todos los puntos de la frontera coinciden con nodos de la malla. Aquí no aparecen puntos de difracción, pues la frontera se aproxima de forma suave.

La Figura 10 presenta una gran similitud con la Figura 7 en todas sus gráficas, lo cual no ocurre con las Figuras 11 y 12 respecto a las Figuras 8 y 9, pues mientras las dos primeras concuerdan con el comportamiento esperado, y que se pudo prever al resolver la bahía rectangular, las últimas mostraron el resultado de un esquema divergente.

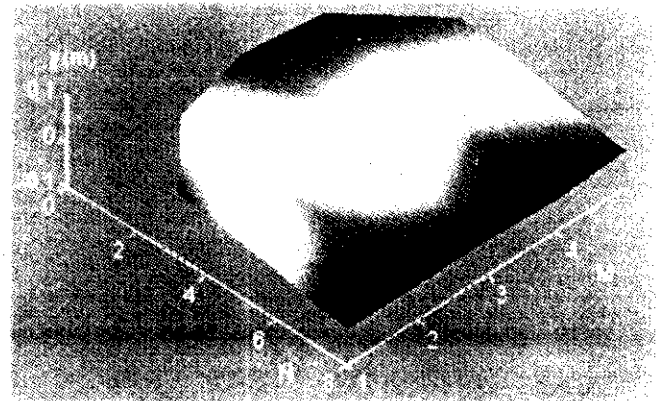
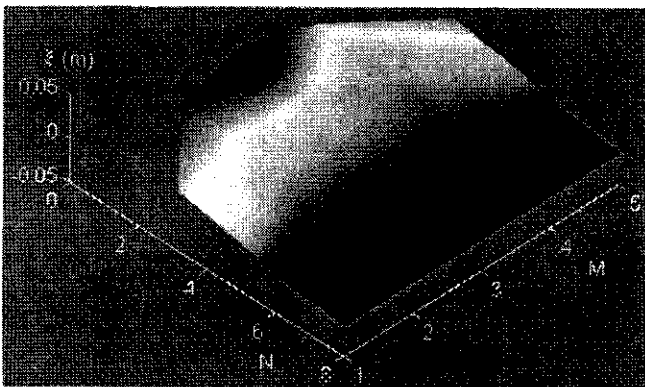
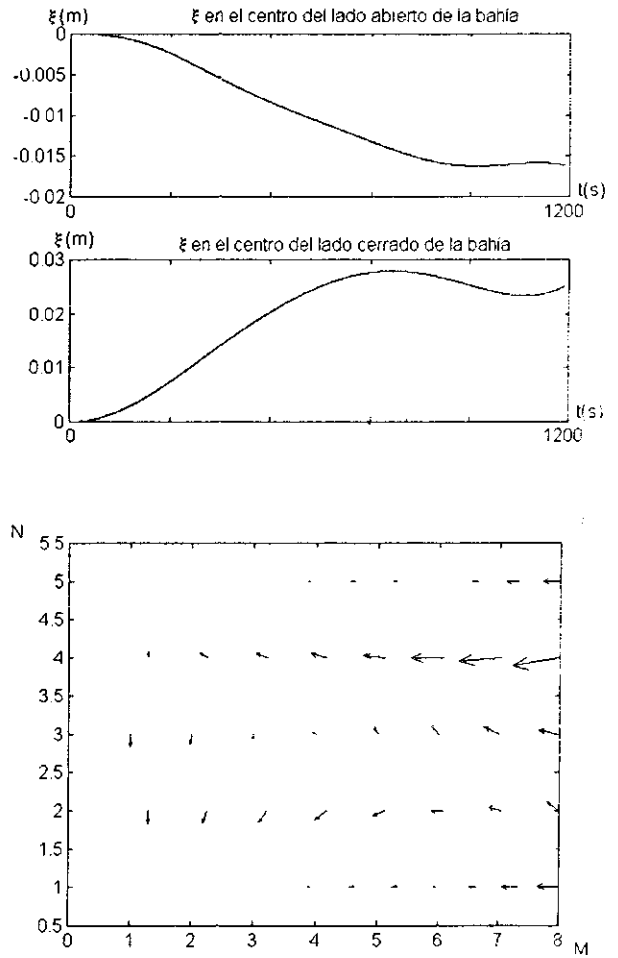
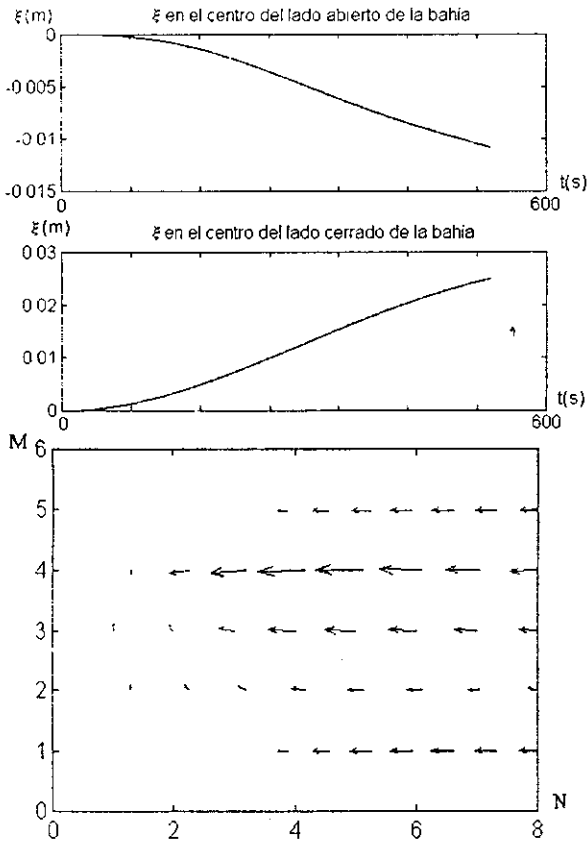


Figura 10. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 10 \text{ min}$.

Figura 11. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 20 \text{ min}$.

La Figura 12 muestra la preponderancia del *seiche* en la dinámica de la bahía pasada una hora del inicio de la acción de los vientos. Llegado este instante, se establece la onda larga estacionaria entre los dos segmentos de costa paralelos, con una amplitud del orden de los metros. Debido a esto, las curvas que muestran la evolución de ξ en los puntos medios de la entrada y la costa trasera de la bahía, presentan el inicio de oscilaciones que ganan en amplitud y se acoplan en fase. La onda *seiche* se aprecia claramente en la gráfica que representa el nivel de la superficie del mar en el interior del acuatorio, y cuyo eje central (ξ) muestra un cambio de escala al compararse con los de instantes anteriores.

CONCLUSIONES

Se simuló la dinámica de una bahía ideal que se encuentra bajo la acción de un campo de vientos uniforme y constante. Se utilizó el método de las diferencias finitas aplicado a dos modelos. En el primer modelo se aplicó a la frontera curvilínea de la bahía un procedimiento de aproximación convencional, en tanto en el segundo se usaron coordenadas ajustadas a dicha frontera.

El Modelo 2 resultó en varios aspectos superior al Modelo 1 pues al realizarse una transformación de la geometría de la bahía a la del rectángulo, se simplificaron las condiciones de contorno del sistema de ecuaciones diferenciales, ahora expresadas sobre líneas paralelas a los ejes coordenados. Además se simplificó también el tratamiento numérico de los puntos de la frontera. Se destaca la incidencia que tiene sobre la simulación el aproximar la frontera curva por medio de segmentos de recta paralelos a los ejes x y y , lo cual se refleja en la aparición de puntos artificiales de difracción de la onda larga que origina el viento. Este efecto no aparece al utilizarse las coordenadas ajustadas a la costa.

Se establece un compromiso entre las ventajas señaladas para el procedimiento de transformación de las coordenadas y las dificultades que aparecen con el mismo, debido a que tanto la transformación como el sistema de ecuaciones transformadas pueden resultar muy complejos. Lo primero puede resolverse automatizando el proceso, por ejemplo con el uso de los sistemas computacionales conocidos para el cálculo simbólico; lo segundo se convierte en dificultad cuando se trabaja con ecuaciones de grado superior.

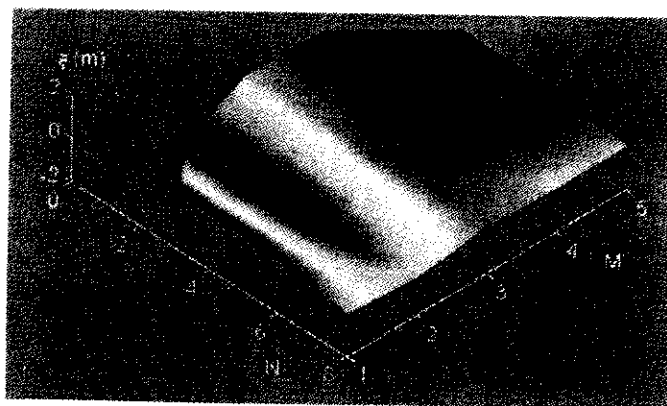
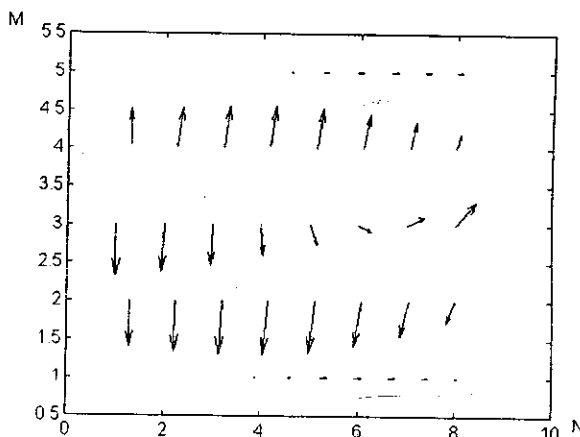
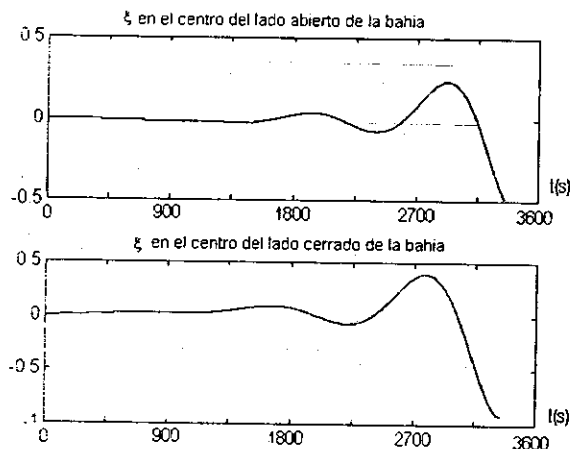


Figura 12. Estado de la dinámica y de la excitación del nivel del mar en la bahía para $t = 60$ min .

REFERENCIAS

1. FRIEDRICHS, K.O. (1948): "On the derivation of the shallow water theory", **Comm. Pure. Appl. Math.** 7, 81-85.
2. JOHNS, B. *et al* (1981): "Numerical simulation of the surge generate by the 1977 Andhra cyclone", **Quart. J. R. Met. Soc.** 197(554), 919-934.
3. KEULEGAN, G.H. (1951): "Wind tides in small enclosed channels", **J. Res. Natl. Bur. Stand.** 46(5), 358-381.
4. LARDNER, R.W. (1993): "Optimal control of open boundary conditions for a numerical tidal model", **Comp. Meth. Appl. Mechan. Eng.**, 102, 367-387.
5. SIGNORINI, S. T. *et al* (1992): "Hurricane-induced surge and currents on the Texas.Louisiana Shelf", **J. Geophys. Res.**, 92(C2), 2229-2242.