BASES TEORICAS PARA LA DESCRIPCION DE OSCILACIONES Y ONDAS EN UN FLUIDO VISCOSO, ROTATORIO Y COMPRESIBLE

José Marín Antuña, Arezky Hernández Rodríguez y Oscar Sotolongo Costa,
Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de La Habana

RESUMEN

En el presente trabajo se continúan las investigaciones relacionadas con la propaganación de ondas en diferentes tipos de fluidos compresibles. Nuestros estudios anteiores nos han permitido establecer las características físicas fundamentales de la excitación y la propagación de ondas lineales en fluidos ideales rotatorios compresibles, así como en fluidos viscosos compresibles. En este artículo se efectúa una generalización de los estudios anteriores y se obtiene una ecuación para describir las oscilaciones lineales en un fluido viscoso, rotatorio y compresible. Es realizado un análisis detallado de las consideraciones físicas para la obtención de la ecuación. Las ecuaciones reportadas en trabajos anteriores son obtenidas como caso particular de la ecuación del presente trabajo.

ABSTRACT

In this paper we continue the research about the propagation of waves in different kinds of compressible fluids. Our previous study has permited to stablish the basic physic characteristics of the generation and propagation of linear waves in ideal rotating compressible fluids and also in viscous compressible fluids. In this paper we realize a generalization of the previous study and obtain an equation which describes the linear oscillations in a viscous, rotating and compressinle fluid. A detail analysis of the physical considerations to obtain this equation is done. The reported in previous works equations are obtained as a particular case of the present equation.

1. INTRODUCCION

Durante los últimos años en relación con las necesidades de un desarrollo teórico que permita desentrañar las principales características físicas de la propagación de ondas en diferentes tipos de fluidos compresibles hemos venido trabajando en el estudio teórico de la escitación y propagación de ondas en fluidos ideales rotatorios compresibles [1-4] por una parte y en fluidos viscosos compresibles por otra [5-8]. Estos estudios son de interés, no solo desde el punto de vista físico-matemático por las características específicas de las ecuaciones que describen estos procesos, sino también desde el punto de vista de las posibles aplicaciones prácticas en diferentes ramas tales como la Meteorología y el empleo de diversos equippos que trabajan con fluidos viscosos, rotatorios y compresibles.

2. CONSIDERACIONES PREVIAS

Supongamos que tenemos un fluido viscoso, homogéneo y compresible que ocupa todo el espacio IR^3. Consideremos que el fluido gira con velocidad angular $\alpha/2$ alrededor de un eje y referiremos el estudio de los procesos en este fluido a un sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) que gira junto con el fluido de forma tal que el eje $0x_3$ coincida con el eje de rotación. El sistema de ecuaciones de la Hidrodinámica que describe los movimientos en el fluido son:

- La ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}+\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p=\frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}+\frac{1}{\rho}\left[\xi+\frac{\eta}{3}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+\vec{f} \tag{1}$$

donde $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad de las partículas del fluido, p su presión, ρ su densidad, η el coeficiente de viscosidad newtoniana, ξ la segunda viscosidad y $\vec{f}$ las fuerzas externas por unidad de masa que actúan sobre el fluido. Consideremos que el fluido es tal que η y ξ son constantes.

- La ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \tag{2}$$

- La ecuación de estado termodinámico:

$$p=F(\rho,s) \tag{3}$$

donde s es la entropía de la partícula de fluido.

Consideraremos que los procesos que estudiamos no alteran la entropía de la partícula en el fluido, es decir, supondremos que la velocidad de la onda es lo suficientemente grande como para que pueda considerarse un proceso isoentrópico. Entonces, denotemos por

$$c^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_s \quad (4)$$

cuyo sentido físico es el cuadrado de la velocidad del sonido en el fluido y es una función dada de p y de ρ.

Tomando la derivada de (3) con respecto al tiempo, tendremos

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})F = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial t} + ((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_s \equiv \quad (5)$$

$$c^2\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho\right] \equiv c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta (5), la ecuación (2) puede escribirse como:

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad (6)$$

Es conveniente destacar que la ecuación (1) es no lineal, por lo que la teoría exacta de los procesos en el fluido es una teoría no lineal. Sin embargo, en el presente trabajo nos limitaremos al estudio de los fenómenos lineales de pequeñas variaciones de la presión y de las componentes de las velocidades de las partículas del fluido. Así, supongamos que v_o es la amplitud de la velocidad de las partículas del fluido, ω su frecuencia y k el númeo de onda; entonces tendremos que el término esencialmente no lineal en (1) es $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \sim kv_0^2$, en tanto que el término $\partial\vec{v}/\partial t \sim \omega v_0$. La relación entre estas magnitudes es:

$$\varepsilon = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}{\partial\vec{v}/\partial t} = \frac{kv_0^2}{\omega v_0} = \frac{v_0}{c_f}$$

donde c_f es la velocidad de fase de la onda. ε se denomina parámetro de no linealidad. Exigiremos que $\varepsilon << 1$, lo que equivale a decir que la velocidad de las partículas del fluido en la onda es mucho menor que la velocidad de fase de la onda. Esta consideración no entre en contradicción con la consideración de que el proceso sea isoentrópico y de esta forma el sistema que describe los movimientos del fluido adopta la forma:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho}\left[\xi + \frac{\eta}{3}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \vec{f} \quad (7)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad (8)$$

Consideremos las perturbaciones de la presión y de la densidad pequeñas con respecto a una posición de equilibrio: $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, con $p' << p_0$, $\rho' << \rho_0$. Entonces, tomando solo la parte lineal de las expresiones para la densidad y la presión (la que en lo adelante escribiremos sin la prima para simplificar las expresiones), se obtiene:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p = \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\left[\xi + \frac{\eta}{3}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \vec{f} \quad (9)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad (10)$$

Por otra parte en la ecuación (9) la fuerza $\vec{f}$ esta compuesta por dos sumandos, $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$. Por $\vec{f}_1$ entenderemos la fuerza de Coriolis y por $\vec{f}_2$, la fuerza centrífuga, que aparecen como consecuencia de la rotación del fluido en el sistema de referencia elegido.

$$\vec{f}_1 = -\vec{\alpha}x\vec{v}; \quad \vec{f}_2 = -\frac{1}{8}\vec{\nabla}(\vec{\alpha}x\vec{r})^2$$

donde $\vec{r} = (x_1, x_2, 0)$, $(\vec{\alpha}x\vec{r})^2 = \alpha^2 r^2$. Por consiguiente, la ecuación Navier-Stokes ya linealizada adopta la expresión:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\alpha}x\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\left[p + \frac{\rho_0}{8}(\vec{\alpha}x\vec{r})^2\right] = \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\left[\xi + \frac{\eta}{3}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}) \quad (11)$$

Redefinimos la presión dinámica efectiva como $p_e \equiv p + (\rho_0/8)\alpha^2 r^2$. Entonces, bajo la suposición de propagación isoentrópica de las perturbaciones de la presión:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp_e}{dt} - \frac{\rho_0}{8}\frac{\alpha^2 2r}{c^2}\frac{dr}{dt} =$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp_e}{dt} - \frac{\rho_0}{4}\alpha^2 r\frac{v}{c^2} \cong \frac{1}{c^2}\frac{dp_e}{dt}$$

bajo el supuesto de que v << c^2 y siempre que las distancias r al eje de rotación no sean demasiado grandes. Entonces el sistema quedará:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{\alpha}x\vec{v}+\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p=\frac{\eta}{\rho_0}\vec{\nabla}^2\vec{v}+\frac{1}{\rho_0}\left[\xi+\frac{\eta}{3}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \quad (12)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt}+\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \quad (13)$$

donde hemos denotado por p simplemente la presión dinámica p_e. El sistema (12)–(13) es nuestro sistema fundamental de ecuaciones linealizadas para describir las pequeñas variaciones de la presión dinámica en el fluido viscoso, rotatorio y compresible y será el sistema de ecuaciones de partida para nuestro estudio posterior.

3. ECUACION DIFERENCIAL

Como se sabe, existen dos enfoques fundamentales para el estudio de los procesos en los fluidos. Uno se basa en el trabajo directo con las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad encontradas, lo que generalmente entraña dificultades de cálculo grandes y el otro que consiste en reducir el sistema a una ecuación diferencial de orden superior. El segundo método ha sido el empleado en nuestros trabajos anteriores reportados en la bibliografía del presente trabajo y es el que utilizaremos en el presente estudio.

Sustituyendo la divergencia de $\vec{v}$ dada por (13) en (12), se obtiene:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{\alpha}x\vec{v}+\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p=\frac{\eta}{\rho_0}\vec{\nabla}^2\vec{v}-\frac{1}{\rho_0^2c^2}\left[\xi+\frac{\eta}{3}\right]\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}p \quad (14)$$

Apliquemos a (14) el operador divergencia. Entonces obtenemos después de sustituir de nuevo la divergencia de $\vec{v}$ dada por (13):

$$\frac{1}{\rho_2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p}{\partial t}-M\nabla^2p\right]-\frac{1}{\rho_0}\nabla^2p+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}x\vec{v}=0 \quad (15)$$

donde hemos tenido en cuenta que, por el sistema de referencia empleado $\vec{\alpha}=(0,0,\alpha)$, por lo que $\vec{\nabla}x\vec{\alpha}=0$ y por lo tanto, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}x\vec{v}=-\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}x\vec{v}$. Derivemos (15) respecto a t. Entonces queda, finalmente:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+M\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}+c^2\nabla^2\right]\vec{\nabla}\cdot\vec{v}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}x\vec{v}\right)=0 \quad (16)$$

La ecuación (16) será para nosotros la ecuación diferencial fundamental para el vector de velocidades de las partículas del fluido viscoso, rotatorio y compresible. Como se aprecia, (16) es una ecuación diferencial no clásica de cuarto orden para $\vec{v}$ que describe las pequeñas oscilaciones en nuestro fluido. Esta ecuación contiene solo a la velocidad como incógnita, pero sus componentes se encuentran entremezcladas, lo que habla sobre la complejidad del aparato matemático para describir este tipo de fenómenos.

4. ANALISIS DE LOS CASOS PARTICULARES DE LA ECUACION FUNDAMENTAL: FLUIDOS IDEALES ROTATORIOS Y FLUIDOS VISCOSOS NO ROTATORIOS

a) Caso viscoso

Supongamos en (16) que el fluido no rota es decir, $\alpha = 0$. Entonces el segundo sumando se anula y queda:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+M\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}+c^2\nabla^2\right]\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \quad (17)$$

Por ser operadores lineales los aplicados, de (17) se obtiene, finalmente:

$$L[u]=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+M\nabla^2\frac{\partial u}{\partial t}+c^2\nabla^2\vec{\nabla}u=0 \quad (18)$$

No es difícil demostrar que (18) es satisfecha por cada una de las componentes de la velocidad $\vec{v}$. La ecuación (18) se escribe de forma equivalente como sigue:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-M\nabla^2u\right]-\nabla^2u=0 \quad (19)$$

que es la ecuación diferencial fundamental del fluido viscoso no rotatorio reportada en [5], cuya ley de dispersión es:

$$k=\frac{\omega}{\sqrt{2}\sqrt{c^4+\omega^2M^2}}\left\{\sqrt{\sqrt{c^4+\omega^2M^2}+c^2}+i\sqrt{\sqrt{c^4+\omega^2M^2}-c^2}\right\} \quad (20)$$

donde $\vec{v}=\vec{v}_0\exp\{i(\vec{k}\cdot x+\omega t)\}$ con $\vec{k}=(k_1, k_2, k_3)$ y $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$.

b) Caso rotatorio

Para este caso consideremos movimientos bidimensionales, tales que $(\partial/\partial x_2)\vec{v}=0$. Entonces, tomando en (16) el fluido ideal: M = 0, obtenemos:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c^2\nabla_2^2\right]\vec{\nabla}_2\cdot\vec{v}+\alpha\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1\partial t}=0 \quad (21)$$

donde

$$\vec{\nabla}_2\cdot\vec{v}\equiv\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Consideremos, ahora, las ecuaciones del fluido ideal rotatorio:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\alpha v_2+\frac{\partial p}{\partial x_1}=0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\alpha v_1=0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_3}=0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{\nabla}_2\cdot\vec{v}=0 \quad (25)$$

donde hemos supuesto que $\rho_0 = 1$ para simplificar las expresiones. Sustituyendo la divergencia de $\vec{v}$ de (25) y $(\partial v_2/\partial t)$ de (23) en (21), obtenemos:

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c^2\nabla_2^2\right]\frac{\partial p}{\partial t}+\alpha^2\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0 \quad (26)$$

De (25):

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (27)$$

Sustituyendo (27) en (26), obtenemos:

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c^2\nabla_2^2\right]\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\alpha^2}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\alpha^2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0 \quad (28)$$

Derivando (24) respecto a x_3 y (28) respecto a t y sustituyendo la primera en la segunda se obtiene fácilmente, tras agrupar convenientemente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\nabla_2^2 p+\frac{\alpha^2}{c^2}p\right]-\alpha^2\frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}=0 \quad (29)$$

que es la ecuación fundamental de las ondas bidimensionales en el fluido ideal rotatorio estudiada en [1] y cuya ley de dispersión es:

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\alpha^2-\omega^2}{\alpha^2\cos^2\theta-\omega^2}} \quad (30)$$

donde $p = p_0\{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)\}$ con $\vec{k}=(k_1, k_2, k_3)$ y $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$.

4. CONCLUSIONES

Como hemos podido apreciar, la ecuación (16) de las pequeñas oscilaciones en un fluido viscoso rotatorio y compresible reproduce como casos particulares los de los fluidos viscosos no rotatorios por un lado, y los de los fluidos ideales rotatorios por el otro y los contiene a ambos como casos particulares.

REFERENCIAS

1. MARIN ANTUÑA, J. (1984): "Sobre una ecuación para ondas bidimensionales en un líquido giratorio y compresible". **Revista Cubana de Física**, IV(3).
2. ________________ y S.A. GABOV (1985): "Sobre un problema no estacionario de la difracción de ondas en un líquido giratorio y compresible", Vestnik Moskov. Univers. Seria 3, Fizika-Astronomia, Universidad de Moscú, 26(3), (en ruso).
3. ________________ (1989): "Sobre un problema de ondas estacionarias en un fluido giratorio y compresible", **Revista Cubana de Física**, IX(3).
4. ________________(1989): "Difracción del paquete de Bessel en un líquido giratorio y compresible", **Revista Cubana de Física**, X(1).

5. MARIN ANTUÑA, J. y O. COSTA SOTOLONGO (1991): "Sobre una ecuación para oscilacio-nes pequeñas en un fluido viscoso y compresible", **Revista Cubana de Física**, XI(1).

6. ________________________________ (1991): "Ondas en medios viscosos compresibles", **Revista Cubana de Física** XI(2-3).

7. ________________________________ (1992): "Solución fundamental y Función de Green para la ecuación de las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso compresible", **Revista Cubana de Física**, XII(1).

8. MARIN ANTUÑA, J. (1992): "Oscilaciones no estacionarias de un fluido viscoso compresible para una excitación periódica espacial", **Revista Cubana de Física**, XII(1).