PRIMER CONCURSO DE PROBLEMAS DE FISICA "Fernando Crespo Sigler"

Primer lugar: Ernesto Altshuler

Detectando el Monopolo Magnético

De existir el llamado *monopolo magnético* (esto es, la "carga magnética" aislada), las ecuaciones Maxwell pudieran enunciarse así:

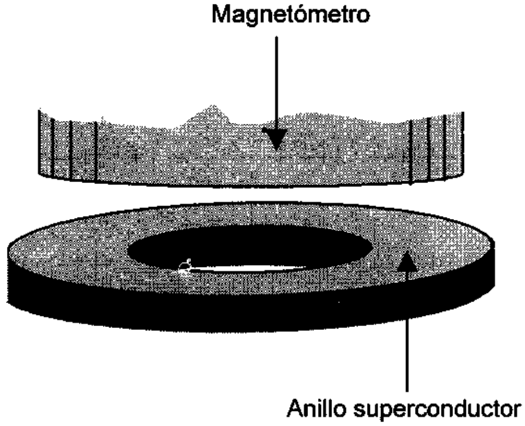
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_m \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_e \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m \tag{4}$$

donde ρ_m y $\vec{J}_m$ son la *densidad de carga magnética* y la *densidad de corriente de carga magnética*, respectivamente, mientras que el resto de los símbolos corresponden a la formulación convencional de las ecuaciones. Algunos cálculos teóricos indican que el monopolio magnético debe tener una magnitud de 4×10^{-15} Tm^2. Aunque hasta hoy no se ha podido probar experimentalmente su existencia, desde los primeros años 80' se ha estado tratando de detectar mediante un montaje como el que muestra la Figura 1.



a) Explique el principio de funcionamiento de este detector. Tenga en cuenta que, dentro del material superconductor $\vec{E} = 0$.

b) Suponga que el anillo superconductor se ha conformado a partir de una lámina superconductora de alta temperatura crítica cuyo grosor es de 1 μm . ¿Cuál es, aproximadamente, el máximo radio interior que puede poseer el anillo si se pretende detectar el monopolo con el dispositivo inmerso en un baño de nitrógeno líquido ($T \approx 77$ K)? Suponga que $\vec{B}$ es uniforme dentro del orificio del anillo, y que es nulo dentro del material superconductor. Desprecie el efecto de los "ruidos magnéticos" del ambiente tales como el campo magnético terrestre, y los campos asociados a las líneas de transmisión y a las señales de radiofrecuencia.

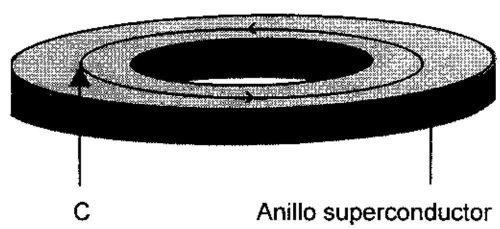
NOTA: *Este ejercicio se torna mucho más sencillo si se agregan las siguientes sugerencias al final de los incisos (a) y (b).*

inciso a) Integre la ecuación (1) en una superficie limitada por un contorno C dentro del anillo superconductor que encierre el orificio.

inciso b) Compare las energías térmica y magnética asociadas al anillo superconductor.

Respuesta

a) Integrando (1) sobre la superficie S limitada por el contorno C según la siguiente figura:



y aplicando el Teorema de Stokes, obtenemos:

$$\int_C^o \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} - \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{s}$$

como $\vec{E} = 0$ dentro del superconductor,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} - \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \text{R1}$$

Definamos:

$\phi_s \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ como el flujo magnético que atraviesa el contorno C

$I_m = -\frac{\partial}{\partial t}Q_m = \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{s}$ como la corriente de "carga magnética" que atraviesa el contorno C.

Sustituyendo en R1 estas definiciones y suponiendo que $\vec{B}$ es uniforme dentro del orificio del anillo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_s + Q_m) = 0$$

O sea, si una carga magnética atraviesa C en cualquier dirección o con cualquier velocidad, el flujo magnético ϕ_s asociado al mismo contorno se "adapta" para que la suma de ambos sea constante. Así, una variación de flujo magnético de unos 4×10^{-15} Tm^2 medido con la ayuda del magnetómetro (o un múltiplo entero de ese valor) puede ser interpretado como el paso de una "carga magnética" a través del anillo superconductor.

b) Aún si somos capaces de apantallar todos los "ruidos" magnéticos externos convenientemente, pueden haber variaciones del estado supenconductor asociados a fluctuaciones térmicas que afecten el experimento. Si la energía media de estas fluctuaciones a $T \approx 77$ K, E_T, es igual o mayor que la energía magnética asociada al paso de un monopolio magnético E_{mm}, no es posible realizar la detección. O sea, para que nuestro dispositivo funcione, debe cumplirse la condición:

$$E_T < E_{mm} \qquad \text{R2}$$

La energía térmica a 77 K, vale:

$$E_T = \frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\, J/K \cdot 77K = 5.3\cdot 10^{-22} J \qquad \text{R3}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. La energía magnética asociada a $\vec{B}$ dentro del volumen acotado por la trayectoria C y las superficies planas del anillo, es:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V \vec{B}_2 dv = \frac{1}{2\mu_0}\left\{\iiint_{V_{orificio}} \vec{B}_2 dv + \iiint_{V_{sc}} \vec{B}_2 dv\right\}$$

Como $\vec{B} = 0$ dentro del material superconductor, y suponiendo $\vec{B}$ uniforme dentro del orificio:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_{V_{orificio}} \vec{B}_2 dv = \frac{B^2}{2\mu_0}V_{orificio} = \frac{B^2}{2\mu_0}\pi r^2 d = \frac{1}{2\mu_0}\phi^2\frac{d}{\pi r^2}$$

donde d es el grosor del anillo, r es su radio interior, y ϕ es el flujo magnético que atraviesa el contorno C. Si sustituimos valores para $\phi = 4 \times 10^{-15}$ Tm^2:

$$E_{mm} = \frac{(4\cdot 10^{-15} Tm^2)}{2\cdot 1.26\cdot 10^{-6} H/m}\cdot\frac{1}{\pi r^2} = 6.35\cdot 10^{-30}\frac{1}{\pi r^2} J \qquad \text{R4}$$

Sustituyendo R3 y R4 en R2:

$$5.3\cdot 10^{-22} J < \frac{6.35\cdot 10^{-30}}{\pi}\cdot\frac{1}{r^2} J \Rightarrow r < 0.63 \cdot 10^{-4} m \Rightarrow$$

$r < 63\ \mu m$

Aunque este anillo "de alta temperatura" ha sido diseñado expresamente para el presente problema, sus dimensiones no han de ser muy lejanas de las que se utilizan en la práctica. Entonces no es de extrañar que, de existir, sea bien difícil detectar el monopolo magnético: ¡Hay que esperar a que uno de ellos "se le ocurra" atravesar nuestro minúsculo anillo superconductor!