

PRINCIPIO DE HUYGENS PARA LAS ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS Y DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

J. Romero, O. Calzadilla y L. Hernández. Facultad de Física. Universidad de La Habana. Colina Universitaria. 10400 La Habana, Cuba.

RESUMEN

Como es conocido para el estudio de la difracción es usual utilizar las aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer, en dependencia de la distancia a la cual se está realizando la observación. En el uso de la aproximación de Fresnel se tiene que introducir el factor de oblicuidad que complica grademente la solución analítica del problema. En general, resulta de gran dificultad para el estudiante determinar la región de trabajo, de campo lejano o campo cercano. En el presente trabajo se estudia la distribución de intensidades luminosas a lo largo del eje de una abertura circular debido a la difracción en ella. Para realizar dicho estudio no se ha recurrido a ninguna de las aproximaciones tradicionales: Fresnel o Fraunhofer. Sólo se ha tenido en cuenta el Principio de Huygens-Fresnel, complementado con la teoría de Kirchoff, para aplicarlo a la difracción en una abertura circular de un frente de onda plano. Las soluciones que se obtienen son analíticas. El resultado ha permitido por primera vez obtener una función analítica para la distribución de la intensidad luminosa a lo largo del eje desde la abertura hasta el infinito, en función de : la longitud de onda incidente, el radio de la abertura y la distancia de observación.

ABSTRACT

As it is known in order to study diffraction, Fresnel and Fraunhofer's approximations are employed. When you use Fresnel's you have to introduce the obliquity factor, which complicates a lot the problem. It is difficult for the students to determine the working region, whether it is a distant field or not. In this work the distribution of light intensity trough the circular hole axis when diffraction occurs is studied. None of the traditional approximations are used. We have only taken into account the Huygens-Fresnel Principle, in addition to Kirchoff's theory to solve the problem with plane waves. Analytical solutions are obtained. The result allowed for the first time to obtain an analytical function for the distribution of the light intensity in the axis from the aperture to the infinite depending on incident wavelength, aperture's radio and observation distance.

INTRODUCCIÓN

La teoría de Fresnel, unida al principio de Huygens, permitió por primera vez calcular la intensidad de la luz difractada en un punto del espacio. Sin embargo, el modelo fue insuficiente porque se tuvo que introducir un factor de oblicuidad con el fin de describir la dirección de las emisiones secundarias. Fresnel mismo reconoció la necesidad de introducir un parámetro de este tipo, pero lo único que hizo fue conjeturas acerca de su expresión analítica. Los resultados de su teoría arrojaron incongruencias. La fundamental que se encontró, fue que la energía por unidad de área de las ondas secundarias, es igual a la energía por unidad de longitud de la onda primaria, dividida entre la longitud de onda de la radiación. Este resultado no puede ser explicado físicamente. La otra incongruencia es que las ondas secundarias se deberían emitir con un retardo de fase de $\pi/2$ en relación con la onda primaria. Otro resultado sin explicación física. Posteriormente, Kirchoff utilizando las funciones de Green, encontró una expresión para las ondas esféricas monocromáticas.

En el presente trabajo se exponen los resultados generales, correspondientes a la formulación matemática del principio de Huygens para ondas planas monocromáticas. Para ilustrar la importancia de esta formulación, se muestra la utilización de la misma en el cálculo de la intensidad de la luz difractada por una abertura circular. Además, con el objetivo de simplificar, nos limitamos a exponer los resultados correspondientes al cálculo sólo sobre el eje normal al plano que contiene a dicha abertura y que pasa por su centro. Hay que señalar también, que a diferencia de las formulaciones anteriores, la presente se aborda de forma vectorial y sin recurrir a aproximaciones.

Razones, como son las de orden lógico y formal, influyeron para dividir el trabajo en dos partes. La primera corresponde a un breve comentario sobre la deducción de la expresión del diferencial del vector del campo eléctrico. Dicha deducción, se hizo sobre la base del mencionado principio y con ayuda de una identidad matemática, la cual se obtuvo a partir de las funciones de Green. O sea, esta identidad permite expresar el principio de Huygens

matemáticamente, con su ayuda se encuentra la expresión del diferencial del vector del campo eléctrico. En la segunda parte se determina la expresión del vector del campo eléctrico correspondiente a la difracción por la abertura, así como la intensidad de este campo. Seguido se hace un análisis de los resultados obtenidos, comparándolos con los de la teoría de Fresnel. Para finalizar, se muestran y se discuten las gráficas de intensidad relativa en función de la distancia a la abertura dividido el radio de la misma. Aquí hay que mencionar, que la posición de los máximos y de los mínimos de intensidad, así como la cantidad de extremos que se obtienen, coinciden con los del modelo de Fresnel. Además, como podrá verse posteriormente, se obtiene por primera vez una fórmula analítica donde se evidencia con toda claridad, que la intensidad del máximo disminuye en la medida en que se encuentra más cerca del orificio difractante, mientras que la intensidad del mínimo aumenta en iguales condiciones.

1- PRINCIPIO DE HUYGENS

Supongamos que tenemos un frente de onda plano con fase α , que en el instante inicial, se encuentra a la distancia R de un punto p . Además, consideremos que a partir de dicho instante el frente se mueve acercándose a p . El vector del campo eléctrico de una onda plana monocromática, cuyo frente de onda de fase α cumple con las consideraciones antes hechas, puede expresarse a través de la relación 1.1. Aquí ω es la frecuencia de oscilación del vector del campo eléctrico y k es el módulo del vector de onda \vec{k} , \vec{r} es el vector que localiza el punto de observación p respecto a un punto de referencia cualquiera (o) y \vec{r}' localiza los puntos sobre el frente de onda respecto a la misma referencia (fig. 1.1).

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = \vec{E}_o(t) e^{i(\omega t + \vec{k}(\vec{r}' - \vec{r}) + \alpha)} \quad 1.1$$

Según el principio de Huygens, cada punto de un frente de onda se comporta como una fuente emisora de ondas secundarias de igual frecuencia y longitud de onda que la primaria, con la particularidad de que las ondas secundarias avanzan con la misma velocidad de la onda primaria en cada punto. Para ondas planas monocromáticas,

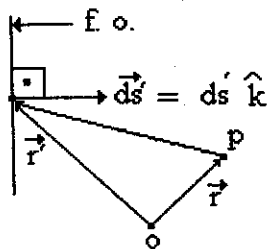


fig. 1.1

este principio se expresa matemáticamente a través de la fórmula que aparece a continuación.

$$d\vec{E}_p(\vec{r}', t) = (d\vec{s}' \times \vec{E}_p(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})}) \times \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial |\vec{r}' - \vec{r}|} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}|}}{2\pi |\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \quad 1.2$$

Esta relación es consecuente con el principio de Huygens, expresa como influye cada fuente secundaria sobre cualquier punto p del espacio.

2- DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

Con el objetivo de ilustrar la importancia de la relación 1.2, procedemos a realizar el cálculo del campo de difracción de una onda plana monocromática, sobre el eje de simetría axial de la abertura circular difractante. Supongamos que tenemos una onda plana monocromática incidiendo de forma normal sobre un plano opaco y que este está dotado de una abertura circular de radio ρ . Coloquemos el origen de coordenadas o sobre el centro de la abertura y tomemos el eje z en la dirección y sentido de \vec{k} . Si queremos determinar el vector del campo eléctrico de la onda difractada, habrá que integrar la relación 1.2 por el área s de la abertura. Aquí nos concretaremos a realizar el cálculo sobre el eje z (fig. 2.1).

Teniendo en cuenta que $\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r}) = -kz$ y llamando R a $|\vec{r}' - \vec{r}|$, el vector del campo eléctrico de la onda difractada podrá expresarse a través de la relación 2.1.

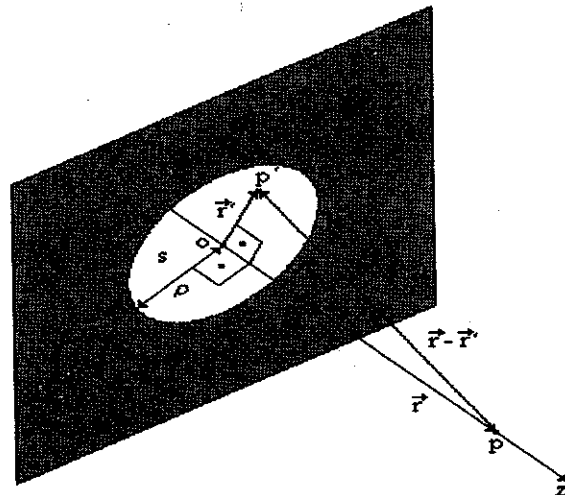


fig. 2.1

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{e}_z \times \vec{E}_p(z, t) e^{-ikz}) \times \int_s \frac{\vec{r}' - z\hat{e}_z}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) ds' \quad 2.1$$

Calculando en esta última el valor de la integral por la abertura obtenemos el vector del campo eléctrico.

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_p(z, t) \left[1 - \frac{z e^{ik(\sqrt{\rho^2+z^2}-z)}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right] \quad 2.2$$

La intensidad luminosa la calculamos determinando el módulo al cuadrado del vector del campo eléctrico.

$$I(z, t) = I_0 \left[1 + \frac{z^2}{z^2 + \rho^2} - \frac{2z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \cos(k(\sqrt{z^2 + \rho^2} - z)) \right] \quad 2.3$$

La condición de máximos y la condición de mínimos se obtienen de la relación anterior y se expresan a través de las ecuaciones 2.4 y 2.5 respectivamente.

$$k(\sqrt{z^2 + \rho^2} - z) = (2n + 1)\pi \quad 2.4$$

$$k(\sqrt{z^2 + \rho^2} - z) = 2n\pi \quad 2.5$$

Si hacemos la aproximación $n\lambda \ll z$, entonces se pueden obtener las expresiones 2.6 y 2.7 para la posición de los máximos y los mínimos respectivamente.

$$z \approx \frac{\rho^2}{\lambda(2n+1)} \quad 2.6$$

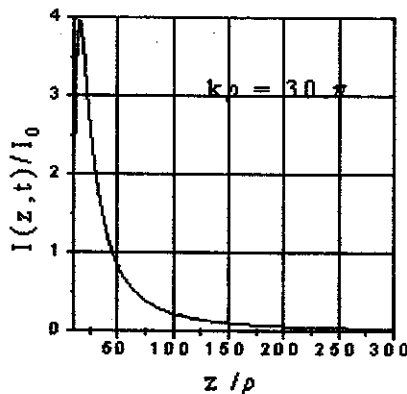
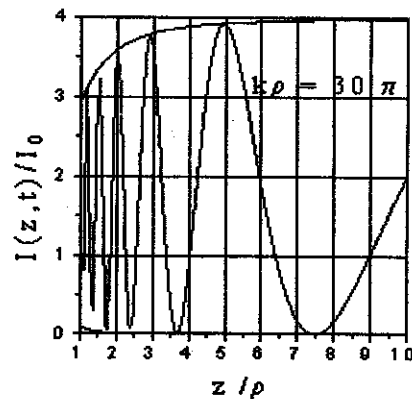
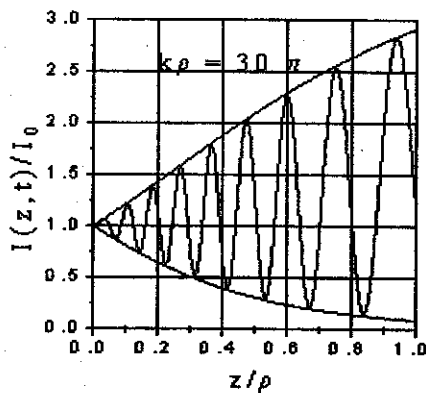
$$z \approx \frac{\rho^2}{2n\lambda} \quad 2.7$$

Estas relaciones son idénticas a las que se obtienen en la teoría de Fresnel. Al final pueden verse gráficos del comportamiento de la intensidad relativa (I/I_0) en función de z/ρ para $k\rho = 30\pi$, además, se han graficado las envolventes de la curva.

Como puede apreciarse en las gráficas la intensidad del máximo disminuye en la medida en que se encuentra más cerca del orificio difractante, mientras que la intensidad del mínimo aumenta en iguales condiciones.

CONCLUSIONES

Sin apelar a aproximación alguna y con la ayuda de resultados matemáticos exactos, se obtuvo una expresión analítica (la relación 1.2) que es consecuente con el principio de Huygens. Dicha relación permitió por primera vez, calcular rigurosamente el campo de difracción de una onda plana monocromática sobre el eje de simetría axial de la abertura circular difractante.



EL SIGNO DEL CALOR Y LA DIRECCIÓN DE PROCESOS LINEALES EN DIAGRAMAS PRESIÓN-VOLUMEN

E. M. Larramendi y O. de Melo

Facultad de Física, Universidad de La Habana. Colina Universitaria. Ciudad de la Habana, Cuba.

RESUMEN

Una formulación general de los procesos lineales en el diagrama PV para gases ideales permite comprender muchas características de este tipo de transformaciones. En particular, un interesante comportamiento del calor específico y el signo del calor es observado para $P = mV + n$ (m, n constantes) con $m < 0$. Un simple análisis cualitativo en este caso puede llevar a errores y contradicciones aparentes en las bases físicas. Se abordan procesos con calor específico negativo, raramente tratados en los libros de texto. Además se plantea una forma sencilla para determinar el sentido (signo) del calor en un proceso lineal.

ABSTRACT

A general formulation of linear processes in PV-diagrams for ideal gases allows understanding many features of this kind of transformations. In particular, an interesting behavior of the specific heat and the sign of the heat is observed in $P = mV + n$ (m, n constants) with $m < 0$. A simplistic qualitative analysis in this case can lead mistake and contradictions as it is stressed in this work. We point processes with negative specific heat, hardly mentioned in text book.

INTRODUCCIÓN

Cálculos sobre calor, trabajo y eficiencias de ciclos son temas muy frecuentes en los cursos de Física Molecular en el nivel de Física General. Estos cálculos son esenciales para la comprensión de la primera y la segunda Ley de la termodinámica. Generalmente el caso de gases ideales es considerado por simplicidad, pero aun en estos casos, la determinación cualitativa del signo de el calor (aspecto importante para la solución de los problemas de clases) no siempre es evidente. De hecho, Dickerson y Mottmann¹ encontraron respuestas erróneas (en prestigiosos libros de textos) de un problema que involucra procesos lineales con pendiente negativa en el diagrama - PV. Ellos analizaron este caso, enfatizando en la aparente contradicción con la segunda ley de la termodinámica.

En este trabajo derivamos un formulación general del calor específico para procesos lineales en el diagrama - PV. Relevantes casos son analizados. Para motivar un análisis más profundo del tema, hagamos la siguiente pregunta: ¿Pueden existir procesos lineales donde el calor sea nulo? Una respuesta cualitativa pudiera ser: "en cualquier proceso lineal el gas realiza trabajo (excepto en el proceso isocórico, en el cual evidentemente el trabajo es nulo); la temperatura varía continuamente (excepto para procesos isotérmicos en los que el calor no es nulo y lógicamente no es un proceso

lineal). Luego los cambios de la energía interna y el trabajo deben estar balanceados para hacer el calor nulo". ¿Pero, que condiciones son necesarias para que esto se cumpla?

II. CALOR ESPECÍFICO PARA PROCESOS PV LINEALES. DISCUSIÓN DE CASOS DIFERENTES

El calor específico molar se puede escribir como:

$$c = c_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT} \quad (1)$$

donde c es el calor específico, U la energía interna, V , P y T usualmente representan el volumen, la presión y la temperatura. Para el gas ideal,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \quad \text{y} \quad c_v = \frac{i}{2} R$$

luego

$$c = \frac{i}{2} R + P \frac{dV}{dT}$$

el término dV/dT se determina de la función $P(V)$. En el caso de procesos lineales

$P = mV + n$, y tomando en cuenta la ecuación de estado del gas ideal (para 1 mol):

¹ R.H. Dickerson and J. Mottmann, "On the thermodynamic efficiencies of reversible cycles with sloping straight-line processes", Am. J. Phys. 62, 558-562 (1994)

$$RT = mV^2 + nV \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{2mV + n}{R} \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{R}{2mV + n} \quad (2)$$

usando las ecuaciones 3 y 2 tenemos:

$$c = \frac{i+2}{2}R - \frac{R}{2 + \frac{n}{mV}} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta esta ecuación podemos analizar tres casos:

Caso I. ($m \geq 0$; $n > 0$). Estos procesos pueden ocurrir para cualquier valor de V . Fig 1a muestra el comportamiento de T , P y c en este caso. El calor específico es siempre positivo pero decrece con el aumento del volumen hasta un valor asintótico. El signo del calor solo depende del sentido del proceso, por ejemplo: si el volumen aumenta, el calor es absorbido y viceversa. Una idea cualitativa de este comportamiento es simple: al incrementarse el volumen el gas realiza trabajo, al mismo tiempo que la temperatura se incrementa (el proceso va hacia las isothermas de mayor temperaturas), y por la primera ley de la termodinámica, el calor debe ser absorbido por el sistema. El caso de $m=0$ (Fig. 1b)

es un típico proceso isobárico: P y c son constantes y T varía linealmente con el volumen.

Caso II. ($m > 0$; $n \leq 0$). También en este caso el sentido del calor depende del sentido del proceso. Esto es debido a que el calor es siempre positivo. La diferencia con el caso I es que en este caso el calor específico aumenta con el volumen (Fig. 1c), pero para $V \rightarrow \infty$ toman el mismo valor $c_{\infty} = (i+1)R/2 = (c_p + c_v)/2$. Un interesante caso es cuando $n = 0$, en este caso del proceso es politrópico para cualquier valor de m (Fig. 1d), $c = c_{\infty}$ y el índice politrópico es -1 .

Caso III. ($m < 0$; $n > 0$). Este es el caso más interesante. En procesos con esta características no es posible tener el sentido del calor. Esto no solamente depende del sentido del proceso, sino también del valor del volumen. Análisis simplista de este tipo de procesos, en este sentido, puede deberse a errores y contradicciones aparentes. Cuando la presión disminuye con un incremento del volumen, por simple inspección no se conoce si la temperatura aumenta o disminuye. De la Fig. 2 se puede ver que existe un valor del volumen ($V_T = n/2m$) en que el signo del diferencial de la temperatura cambia. Para valores del volumen

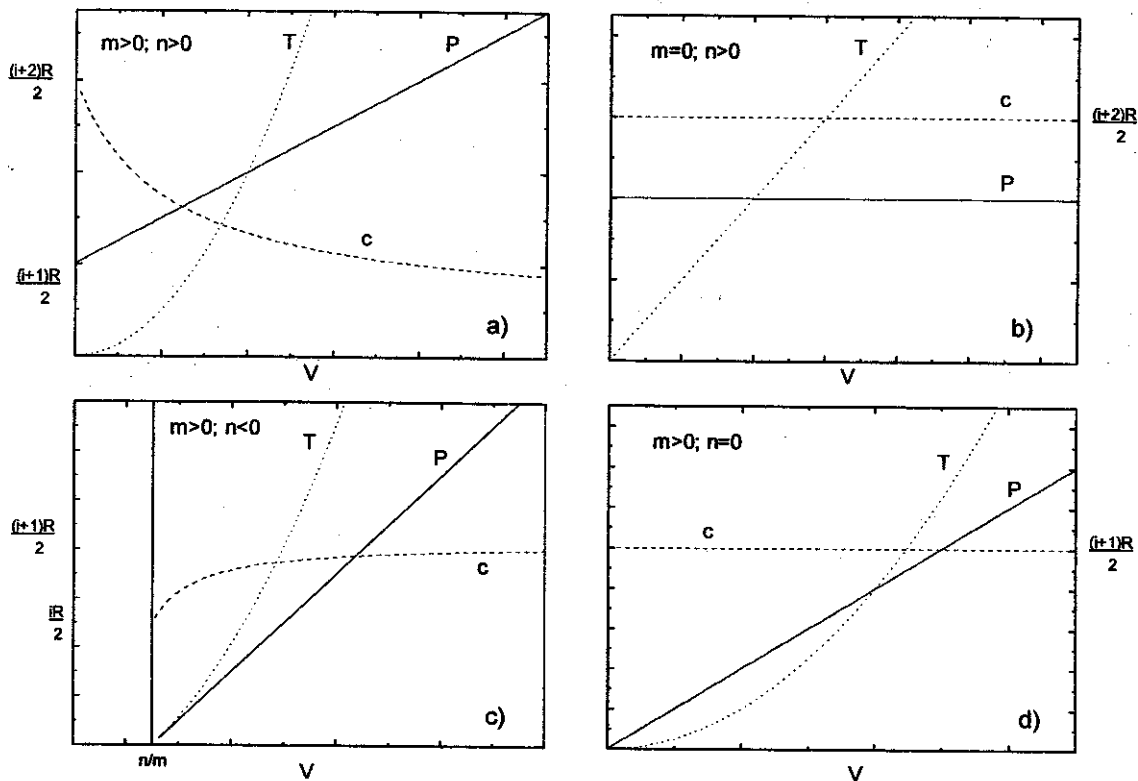


Fig. 1. Comportamiento de la temperatura T , presión P y el calor específico c como función del volumen para un proceso lineal del tipo $P=mV+n$ con a) $m>0$ y $n>0$; b) $m=0$ y $n>0$; c) $m>0$ y $n<0$; d) $m>0$ y $n=0$. (Los valores colocados en el eje vertical corresponden al calor específico).

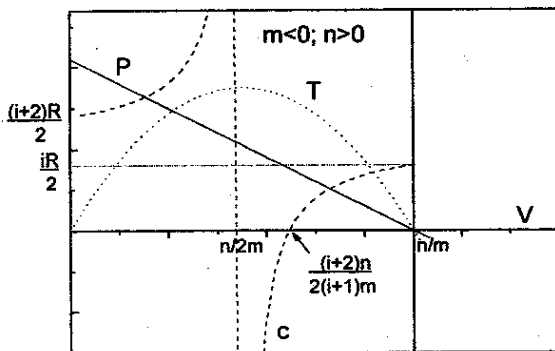


Fig. 2. Como en la Fig. 1 pero para $m < 0$ y $n > 0$. El volumen donde el signo del diferencial de la temperatura cambia es $V_T = n/2m$. El volumen donde el signo del calor específico cambia también se muestra.

menor que $n/2m$ la temperatura aumenta con el decrecimiento de la presión, lo contrario ocurre cuando el volumen es mayor que V_T . El calor específico aumenta hasta V_T , donde se hace infinito. Desde V_T hasta $V_S = (i+2)n/2(i+1)m$ el calor específico se hace negativo. Para volúmenes mayores que V_S el calor específico es positivo. Considerando el signo de la variación de la temperatura y el del calor específico, podemos analizar el signo (sentido) del calor usando la expresión diferencial $\delta q = cdT$. Una descripción cualitativa del signo de dT , c y δq es mostrada en la parte inferior de la Fig. 3. Se puede ver que el calor cambia de signo en $V_S = (i+2)n/2(i+1)m$. Para este proceso, en sentido del aumento de volumen, el calor primeramente es absorbido y luego desprendido por el gas.

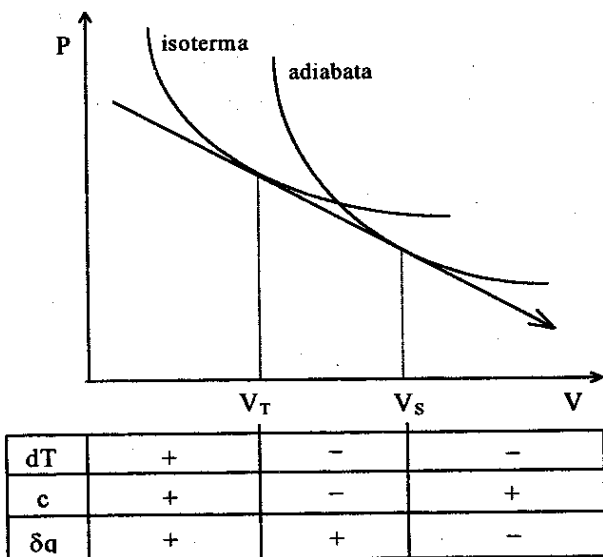


Fig. 3. Proceso lineal AB en un diagrama PV (arriba). La isoterma y la adiabata tangentes al proceso también se muestran. El calor es absorbido por el gas para $V < V_S$ y desprendido para $V > V_S$.

El valor del volumen donde el signo de dT cambia puede ser visualizado en un diagrama PV como el punto en que el proceso lineal es tangente a una isoterma. De hecho para un proceso isotérmico:

$$PV = const \Rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{const}{V^2}$$

considerando que una isoterma es tangente al proceso lineal en V_T :

$$const = V_T(n - mV_T) \quad \text{y} \quad -\frac{const}{V_T^2} = -m$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos que $V_T = n/2m$ como se esperaba. También se puede probar con argumentos similares que el valor de volumen en que el calor cambia de signo es donde el proceso lineal es tangente a una adiabata en el diagrama PV. Para un proceso adiabático considerando un gas ideal:

$$const = V_S^\gamma (n - mV_S);$$

$$-const \cdot \gamma V_S^{-(\gamma+1)} = -m$$

y

$$const = V_S^\gamma (n - mV_S) \quad \text{y} \quad -const \cdot \gamma V_S^{-(\gamma+1)}$$

Finalmente se obtiene:

$$V_S = \frac{n\gamma}{m(\gamma+1)} = \frac{(i+2)n}{2(i+1)m}$$

El conocimiento de este punto es necesario para cálculos correctos de la eficiencia de ciclos que involucre procesos lineales de pendiente negativa. Bucher² hace una discusión de la determinación gráfica de este punto.

Podemos pensar en un proceso de este tipo en que su calor total sea nulo. Las condiciones de tales procesos pueden ser obtenidas usando:

$$\delta q = cdT = \left[\frac{i+2}{2}R + \frac{mVR}{n-2mV} \right] dV \quad (4)$$

de la ecuación (2):

$$dT = (n - 2mV) \frac{dV}{R}$$

sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos:

$$\delta q = \left[\frac{i+2}{2}n - (i+1)mV \right] dV$$

² M. Bucher, "Gráficoal determination of heat reversal along a linear PV process", Am. J. Phys. 67, 93 (1999)

En esta ecuación $\delta q/dV$ es una función impar con cero en V_S . Luego, cualquier proceso que comience y termine en estados simétricos con respecto a V_S tendrá su calor total nulo. Las tres regiones interesantes son: I) desde $V=0$ hasta $V=V_T$ (la temperatura aumenta y el calor específico es positivo); II) desde $V=V_T$ hasta $V=V_S$ (la temperatura disminuye y el calor específico es negativo); III) desde $V=V_S$ hasta $V=-n/2m$ (la temperatura disminuye y el calor específico es positivo). Estas regiones y sus relaciones con la isoterma y la adiabata tangentes al proceso lineal son mostradas esquemáticamente en la Fig. 3 para un proceso AB.

III. CONCLUSIONES

Una ecuación general para el calor específico en procesos lineales fue deducida. El problema del signo del calor, en relación a la dirección del proceso, se puede analizar fácilmente utilizando $\delta q=cdT$, con características distintivas halladas en el caso de procesos lineales con pendiente negativa. Como ha sido indicado en un trabajo anterior, estas características son ignoradas en problemas de clase.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las útiles sugerencias del Profesor Medel Pérez Quintana (Facultad de Física, Universidad de La Habana)

REFERENCIAS

1. Dickenson, R.H and J. Mottmann, (1994): "On the thermodynamic efficiencies of reversible cycles with sloping straight-line processes", Am. J. Phys. **62**, 558-562
2. Bucher M., (1999): "Grafical determination of heat reversal along a linear PV process", Am.J Phys. **67**, 93