ANALISIS FRACTAL : ALGUNAS APLICACIONES

Amelia Martín Rodríguez
Dpto. de Física del ISPJAE

RESUMEN
Las aplicaciones de los conceptos fractales se han ido extendiendo desde su aparición. Una importante razón para esto es la gran cantidad de técnicas que conllevan análisis de imágenes, pues en el estudio de esas imágenes todos los procedimientos que contribuyan a brindar información son bienvenidos. El análisis fractal, la determinación de la dimensión fractal de una estructura y de otras magnitudes relacionadas es una herramienta que se revela útil si se la sabe emplear, si se conoce su alcance. Hacemos una breve síntesis de las ideas de partida y explicamos aplicaciones concretas realizadas por nosotros y por otros autores.

ABSTRACT
Since their discovery fractals have been increasing its applications. A very important reason for this is the fact that many analysis techniques employ different kinds of images. Then, in order to study them any new procedure is welcome. Fractal analysis determination of fractal dimension and other related magnitudes might be a useful tool if you know how to use it.If you know its meaning. We do here a brief synthesis of the fundamental ideas and describe some applications done by us and other authors.

INTRODUCCIÓN

Está establecido que dentro de las técnicas de análisis de imágenes es conveniente conocer y aplicar el análisis fractal, por lo que consideramos adecuado contribuir a su desarrollo. Lo primero que debe conocerse bien es cuales son los principios del análisis fractal. (1, 2, 3)

Toda estructura (microestructura) que revele como propiedad de simetría la invarianza de escala aunque sea solamente en varios rangos es sospechosa de tener propiedades fractales que sean útiles para la detección de atributos o cambios en algunos de ellos al ocurrir procesos en los materiales. Esto es, el todo se parece a sus partes de manera mas o menos exacta. Ha sido observado que muchas formas naturales presentan esos parecidos, restringidos a algunos pocos cambios de escala. (4)

Si el objeto que se estudia es autosimilar en el sentido mencionado, puede ser considerado fractal y se le puede caracterizar por parámetros que han sido establecidos para otros problemas, como son la dimensión fractal, la entropía métrica, y los exponentes de Liapunov. El significado cualitativo de cada una de estas tres magnitudes es el siguiente :

- dimensión fractal en general mide cuanto contenido hay en el objeto fractal
- la entropía métrica mide cuan aleatorio es el comportamiento de la estructura
- los exponentes de Lyapunov miden cuan alejadas están las trayectorias, o sea cuanta divergencia entre trayectorias vecinas hay en el atractor fractal

El problema práctico de calcular parámetros que aporten datos y sean interpretables ha reducido en los trabajos que conocemos la determinación al caso de la dimensión. El cálculo de la entropía y de los exponentes de Lyapunov, en los casos que se ha hecho, requiere grandes series de datos, y es engorroso. Se recomienda cuando se estudian series temporales de la evolución de un proceso para el cual se obtiene un atractor fractal en el espacio de fases.

La determinación de la dimensión fractal de una estructura o imagen de la misma requiere seleccionar un método, desarrollar un algoritmo o varios para efectuarlo, diseñar un software que lo haga, interpretar el resultado, estableciendo de ser posible, comparaciones entre los resultados encontrados por los diversos algoritmos.

La dimensión fractal es un concepto genérico. Tiene su origen en las métricas matemáticas. Acercándonos mediante la intuición a la dimensión topológica, recordaremos que las dimensiones de líneas, cuadrados y cubos son respectivamente de uno, dos y tres. La generalización hecha por Mandelbrot, aprovechando la obra de Haussdorf, a la posible existencia de objetos geométricos de dimensiones intermedias entre esos valores enteros permitió extender la idea.

Un conjunto de métodos se ha ido desarrollando en las aplicaciones de todo tipo para estimar valores de la dimensión . Se agrupan de modo general en las categorías :

1). Cambiando el nivel de grueso de los granos
2). Usando las relaciones de medida fractal
3). Usando la función de correlación
4). Usando funciones de distribución
5). Usando espectros de potencia

Veamos algunas ideas de estos métodos.

1). Cambio del nivel de grueso de los granos o "box counting methods" es un conjunto de técnicas que se basan en la idea de cubrimiento y conteo de probabilidad de que cierto punto pertenezca al conjunto.

2.- Usando las relaciones de medida fractal, teniendo en cuenta qué formas fractales darán lugar a dimensiones no enteras.Un ejemplo de esto es el caso de una masa con centro de distribución, y distribución uniforme a partir de ese centro, $M(r) \propto r^{D}$, M representa la cantidad de puntos del conjunto en función del radio de la distribución. Esto puede medirse y trazar los gráficos log-log de M vs r, siendo la pendiente el valor de cierta cota de la dimensión fractal.

3.- Empleando la función de correlación, que es una cantidad estadística importante.

Sea r(x) la densidad en x de una cantidad que está distribuida aleatoriamente en el espacio. Se define : C(r)= < r(x) r(x + a) >, y este promedio puede hacerse en un conjunto en x fijo o sobre el punto x. Si la distribución es uniforme e isotrópica, la función de correlación es una función sólo de la distancia entre los dos puntos. Su forma funcional puede ser una ley de potencias en la cual el exponente está relacionado con la dimensión fractal.

4.- Usando una función de distribución, por ejemplo, sea P(r) la probabilidad de que un cráter escogido arbitrariamente tenga radio >r.

$$P(r) = \int_{r}^{\infty} p(s)ds; P(r) \propto P(\lambda r), con \lambda > 0, \rightarrow P(r) \propto r^{-D}$$

La forma de potencia es la única forma funcional que satisface la invarianza de escala que se tiene al cambiar r por λr . D sería la dimensión fractal si r es una longitud.

5.- Usando el espectro de Fourier. Cuando se investiga el comportamiento estadístico de un proceso aleatorio temporal o espacial, se puede a menudo obtener el espectro de Fourier, S(f) transformando y pasando a través de los filtros adecuados. Podemos juzgar a partir del espectro si una fluctuación dada es fractal o no.

Para el espectro, cambiar el nivel de la granulación en la observación corresponde a cambiar la frecuencia de corte. Como los fractales son invariantes ante cambio de escala, el espectro de una señal fractal debe ser invariante ante el cambio de la frecuencia de corte. El único espectro con esa propiedad es :

$$S(f) \propto f^{-\beta}, \beta = 5 - 2D, 1 < D < 2$$

D significa aquí la dimensión de una curva en el espacio bidimensional.

APLICACIONES

I. Determinación de la dimensión de una estructura dendrítica con centro de dispersión por método de relación de medida fractal del tipo :

$M(r) \alpha r^{d}$ donde M es la cantidad de "masa " del objeto y r la arista de un cuadrado que se emplea para cubrir la estructura y hacer un conteo. La imagen se binariza, es decir lo que importa de ella es lo que le pertenece, no si hay texturas diferenciadas. El conteo se hace a partir del centro de la distribución y la "r" se hace tender a cero. Se plotea el gráfico log-log cuya pendiente nos da una cota de la dimensión fractal. Este procedimiento es aplicable a otras imágenes parecidas y permite determinar valores medios, 'normales", de la estructura. (2, 3, 5).

II. Análisis de texturas

Un aspecto importante del estudio de imágenes son los análisis de texturas. El análisis de imágenes reporta (6,7) que sólo con un parámetro no es posible diferenciar bien las texturas, pues diversas texturas con igual dimensión fractal tienen distinta apariencia. Estos y otros autores han desarollado el concepto de lacunaridad para complementar el cálculo de dimensión. (7,8). Posteriores algoritmos se han desarrollado para mejorar los cálculos con ahorro de tiempo y mas casos diferentes abordados. (9).

III.- Determinación de la dimensión fractal de la frontera de grano de Zn.

Por uno de los métodos de conteo de cajas, el del " yardstick ", se halla la longitud de la frontera del grano previamente tratado para hacerla irregular. (10,11, 12).

III.- Características fractales de fracturas. Diversos autores reportan el estudio de estas estructuras y hacen la comparación entre los diferentes algoritmos usados (13,14).

REFERENCIAS

1)Benoit B. Mandelbrot, (1983):*"The Fractal Geometry of Nature"*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York.

2)Hideki Takayasu (1990): *"Fractals in the Physical Sciences"*, Eds. Arun Holden, Center for Non Linear Studies, University of Leeds UK, Manchester University Press.

3)*Physica D*, (1989): (38): 1, to 3.

4)Bruce, J. West, (1990): *"International Journal of Modern Physics B"*, (4): 10, 1629-1669.

5) A. Martín y otros,(1993): Memorias Jornada de Retinosis Pigmentaria, La Habana

6) Voss, R. (1984):Random Fractals, Plenum New York .

7) Pentland, A. P. (1984): et al, IEEE Trans. Pattern Analysis Mach.Intell.PAMI 6,

8) Keller, J. et al(1989): Computer Vision, Graphics and Image Processing 45,150 166

9) Sarkar N. y B. Chaudhuri, Pattern Recognition.(25): 9, 1035 1041, 1992.

10) Tanaka M., (1992): Journal of Materials Sciences,27, , 4717-4723.

11) Streitenberger P.et al., (1993):Scripta Metallurgica et Materialia, (33): 4., 541-546.

12) Martin A. y otros, (1999): Revista Cubana de Física, (16): 2

13) Louis, E. F Guinea, (1989): Physica D, 38, 235-241.

14) Fahmy, Y. et al, (1991): J. Mat. Res. Vol.6 no 9 sept.