SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN CAMPOS GRAVITATORIOS DÉBILES

Lic. Lázaro Amoroso Rodríguez.Dr. José Andrés de la Cruz Alcaz *.Lic. Joaquín Argilagos Alvarez.
Departamento de Física. Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"

ABSTRACT
The movement equations in the General Theory of Relativity corresponding to a particle in a weak gravitational field, let us appoint analogy with the movement equations of a charged particle in a electromagnetic field.
A study of this solutions let us appoint a deep analogy between gravitation and electromagnetism. As result of wich we can express the weak gravitational fields by a system of equations similar to the Maxwell's for the electromagnetism field.
This linear solutions let us a similar methodology in the study of gravitational and electromagnetic fields, and their simultaneous treatment in the Physical Courses.

RESUMEN
Las ecuaciones de movimiento de la Teoría General de la Relatividad correspondientes a una partícula en un campo gravitatorio débil, permite establecer determinada analogía con las de una partícula cargada en un campo electromagnético. Como consecuencia de este resultado se puede expresar el campo gravitatorio débil mediante un sistema de ecuaciones análogas a las de Maxwell para el electromagnetismo.
Estas soluciones lineales, con sus limitaciones, desde el punto de vista metodológico permiten estudiar comparativamente a los campos gravitatorio y electromagnético, facilitando su estudio simultáneo dentro de los cursos de Física.

DESARROLLO

En presencia de cuerpos cualesquieras, las ecuaciones del campo gravitatorio débil se reducen a la ecuación de ondas [1].

$$\frac{1}{2}\Box\Psi_{ik} = -\frac{8\pi G}{C^4}\tau_{ik} \text{ , (1)}$$

donde $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha{}^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; i, k = 0,1,2,3 ;

α =1,2,3;C: velocidad de la luz en el vacío,
G: constante de gravitación

Sus soluciones corresponden a los potenciales retardados[1]

$$\Psi_{ik} = \frac{4G}{C^4}\int \tau_{ik}(t - \frac{R}{C})\frac{dV}{R},$$

donde $\tau_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ik}T$,

siendo τ_{ik} el tensor energía impulso.

La ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio:

$$\frac{d^2X_i}{ds^2} + \Gamma_{kj}{}^{i}\frac{dX_k}{ds}\frac{dXj}{ds} = 0$$

en el caso de un campo débil se reduce a la expresión [2]:

$$\frac{d}{cdt}\left[\left(1+\frac{\psi_{00}}{2}\right)\frac{dX_i}{cdt}\right] = -\Gamma^i_{kj}\frac{dX_k}{cdt}\frac{dX_j}{cdt}\left(1+\frac{\psi_{00}}{2}\right), \text{ (2)}$$

donde Γ^i_{kj} corresponde a los símbolos de Christoffelns y los potenciales retardados a las cantidades:

$$\Psi_{00} = -\Psi_{11} = -\Psi_{22} = -\Psi_{33} = \frac{2G}{C^2}\int\frac{\sigma\, dV}{R}$$

$$\Psi_{o\alpha} = \frac{4G}{C^3}\int\frac{J_\alpha dV}{R}$$

$$\psi_{\alpha\beta} = 0$$

Siendo $J_\alpha = \sigma\frac{dX_\alpha}{dt}$, σ es le densidad volumétrica de masa y los símbolos de Christoffelns [3], se reducen a:

* E-Mail: delacruz@electrica.ispjae.edu.cu

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \psi_{oo}}{\partial X_{\mu}} + \frac{\partial \psi_{o\mu}}{\partial X_0}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha 0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_{o\mu}}{\partial X_{\alpha}} - \frac{\partial \psi_{o\alpha}}{\partial X_{\mu}}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$$

La ecuación de movimiento [3], empleando la notación vectorial toma la forma:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(1+\bar{\sigma}\right)\vec{V}\right\} = \tag{3}$$

$$\mathrm{gra}\,d\,\bar{\sigma} + \frac{1}{C}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} + \frac{1}{C}\vec{V}\, x\, rot\, \vec{A},$$

en la cual se han definido respectivamente los potenciales escalar y vectorial como:

$$\bar{\sigma} = G\int\frac{\sigma\, dV}{R},$$

$$A_{\alpha} = -\frac{4G}{C}\int\frac{J_{\alpha} dV}{R}$$

En esta ecuación de movimiento, el término 1 + $\bar{\sigma}$ representa el aumento de la masa ponderable en presencia de otros cuerpos[3], y el primer miembro de la ecuación puede interpretarse como intensidad del campo gravitatorio. En ella los dos últimos términos se interpretan respectivamente como la acción inductiva de las masas en movimiento sobre el cuerpo considerado y la acción del campo de Coriolis.

Físicamente $\bar{\sigma}$ representa el potencial gravitatorio neutoniano, constituyendo el potencial escalar del campo gravitatorio y A_{α} puede interpretarse como su potencial vectorial.

I. Analogía entre las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio con las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo electromagnético.

Las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético pueden expresarse como:

$$\frac{1}{q}\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{1}{C}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} - \nabla\varphi + \frac{1}{C}\vec{V}\; x\; rot\; \vec{A}, \tag{4}$$

Si comparamos (3) con (4) vemos que son completamente análogas, pudiéndose definir como intensidades del campo gravitatorio y de Coriolis respectivamente a:

$$\vec{g} = -\nabla\ \varphi - \frac{1}{C}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\vec{h} = rot\ \vec{A}, \tag{6}$$

Por lo cual (3) puede reescribirse como:

$$\frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{g} + \frac{1}{C}\vec{V} x \vec{h}, \tag{7}$$

siendo: $\vec{P} = m\left(1+\bar{\sigma}\right)\vec{V} \approx m\vec{V}$

Adoptando (7) una forma análoga al caso electromagnético.

II. Sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio débil.

De las expresiones (5) y (6) es fácil deducir ecuaciones que contengan sólo a $\vec{g}\ y\ \vec{h}$, que deben ser análogas a las ecuaciones de Maxwell.

Aplicando rotor a la ecuación (5) se obtiene:

$$rot\ \vec{g} = -\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \tag{8}$$

Al hallar la divergencia a la ecuación (6), resulta:

$$div\ \vec{h} = 0, \tag{9}$$

Al hacer actuar la divergencia en la expresión (5) e mponiendo el gauge análogo al de Coulomb, que $div\ \vec{A} = 0$, resulta:

$$div\ \vec{g} = 4\pi\, G\sigma, \tag{10}$$

Al aplicar el rotacional a la ecuación (6), y suponiendo un flujo estacionario de partículas, para el cual $div\ \vec{J} = 0$, se obtiene:

$$rot\ \vec{h} = \frac{16\pi\, G}{C}\vec{J}, \tag{11}$$

donde $\vec{J} = \sigma\,\vec{V}$

Así queda constituido el sistema de ecuaciones lineales:

$$div\ \vec{g} = 4\pi\, G\sigma, \quad div\ \vec{h} = 0, \tag{12}$$

$$rot\ \vec{g} = -\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \qquad rot\ \vec{h} = \frac{16\pi\, G}{C}\vec{J}$$

Para los procesos no estacionarios, la ecuación de continuidad exige que:

$$\nabla \bullet \vec{J} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

Y por analogía con la generalización de la ley de Ampere en el caso electromagnético, se requiere generalizar para el caso no estacionario a la ecuación (11), obteniéndose:

$$rot\ \vec{h} = \frac{16\pi\ G}{C}\vec{J} + \frac{4}{C}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

Se obtiene así un sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio débil análogo al sistema de ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

$$div\ \vec{g} = 4\pi\ G\sigma, \quad div\ \vec{h} = 0,$$
$$rot\ \vec{g} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \qquad (13)$$
$$rot\ \vec{h} = \frac{16\pi\ G}{C}\vec{J} + \frac{4}{C}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

Estas ecuaciones no admiten en contraposición al segundo par de ecuaciones de Maxwell [4], una formulación covariante de la forma:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial X_k} = \frac{4\pi}{C} J_i,$$

donde F_{ik} es el tensor del campo electromagnético y J_i es al cuadrivector densidad de corriente. Esta imposibilidad radica en los coeficientes de las ecuaciones:

$$div\ \vec{g} = 4\pi\ G\sigma, rot\ \vec{h} = \frac{16\pi\ G}{C}\vec{J} + \frac{4}{C}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

Las ecuaciones de onda que se obtienen para el sistema de ecuaciones (13), son:

$$\Delta\vec{h} - \frac{4}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta\vec{g} - \frac{4}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

cuyo resultado es que la velocidad de propagación de estos campos es $C/2$.

Así, en la aproximación de campos gravitatorios débiles se ha perdido la covarianza del sistema de ecuaciones (13). Es decir, a partir del sistema de ecuaciones del campo gravitatorio no es posible deducir un sistema lineal de ecuaciones análogas a las de Maxwell. Para ello es necesario redefinir el potencial vectorial gravitatorio como:

$$A_\alpha = -\frac{G}{C}\int\frac{J_\alpha dV}{R}$$

Con esto se obtiene el sistema de ecuaciones lineales y covariantes

$$div\ \vec{g} = 4\pi\ G\sigma, \quad div\ \vec{h} = 0,$$
$$rot\ \vec{h} = \frac{4\pi\ G}{C}\vec{J} + \frac{1}{C}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \qquad (14)$$
$$rot\ \vec{g} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t},$$

de donde las correspondientes ecuaciones de onda, muestran C como su velocidad de propagación.

CONCLUSIONES

A partir de cierta analogía entre el campo electromagnético y el gravitatorio débil, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio análogo al sistema de ecuaciones de Maxwell, pero no resulta covariante.

Una redefinición apropiada del potencial vectorial gravitatorio, permite hacer una presentación del campo gravitatorio con una metodología similar a la dedicada al estudio del campo electromagnético. Esta formulación lineal del campo gravitatorio queda por evaluar si efectivamente lo describe con la misma rigurosidad como el sistema de ecuaciones de Maxwell al campo electromagnético.

En la teoría de la gravitación, el campo de Coriolis aparece como una forma de manifestarse el campo gravitatorio, debido al movimiento relativo, algo completamente análogo en el caso del campo electromagnético.

La existencia del término $\frac{1}{C}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$ que por analogía con el campo electromagnético lo podemos considerar como una corriente de desplazamiento, permite concebir la propagación del campo gravitatorio como una onda transversal caracterizado por las magnitudes $\vec{h}$ y $\vec{g}$.

La ecuación $div\ \vec{h} = 0$, según la interpretación análoga a la electrodinámica es que no existen monopolos del campo de Coriolis. Desde el punto de vista de la mecánica está clara la imposibilidad de existencia de estos monopolos, idea que puede trasladarse al caso electromagnético y justificar la no existencia del monopolo magnético.

REFERENCIAS

[1]. Landau y Lifshitz. Teoría Clásica de los Campos. Curso de Física Teórica. Volumen 2. Editorial Reverté, S. A. 1966. Pág. 420.

[2]. Einstein A. The Meaning of Relativity. Science Paperbacks, 1967. Pág. 96.

[3]. Einstein Albert. The Meaning of Relativity. Obra Citada. Pág. 97.

[4]. Landau y Lifshitz. Teoría Clásica de los Campos. Obra Citada. Pag. 97.