ALGUNAS CUESTIONES ELEMENTALES SOBRE LA CARACTERIZACION TOPOLOGICA DE CONJUNTOS EXTRAÑOS EN LA RECTA REAL

C. Trallero Herrero*, W. Pardo Tamayo** y R. Pérez Alvarez**
*ISCTN, Quinta de los Molinos, Ciudad de La habana
**Dpto. de Física Teórica, Universidad de La Habana

RESUMEN
Se analizan diversos métodos de caracterización topológica de conjuntos en la recta real. En particular se estudia la dimensión dependiente del índice q-D(q)- y la rigidez, concluyéndose que ambas toman valores notables para conjuntos no extraños. D(q) resulta idénticamente igual a la unidad y la rigidez igual a cero, esta última depende como L^4 con la longitud L del intervalo cuando este tiende a cero.

ABSTRACT
We analize some methods to characterize topologically strange and normal sets of real numbers. In particular we focus on q-dependent dimension and the stiffness. We conclude that both magnitudes take significant values for non-strange sets, i.e. D(q) is identically one and the stiffness is equal to zero. The later goes to zero as L^4, L beeing the length of the interval.

INTRODUCCION

En varios campos de la Física y la Matemática están apareciendo cada vez con más frecuencia conjuntos de puntos *extraños* [1-12]. Estos se caracterizan por tener propiedades topológicas poco vistas como son, por ejemplo, medida de Lebesgue cero, dimensión fractal, etc. Los atractores de una gran cantidad de ecuaciones diferenciales están comprendidos entre estos conjuntos [7-12]. Los espectros de excitaciones elementales (electrones, fonones, ondas de spin, etc.) en Heteroestructuras Cuasiregulares con mucha frecuencia exhiben también estas propiedades [1-6].

Para caracterizar a estos conjuntos se han introducido, además de la definición de **medida de Lebesgue**, distintos conceptos de **dimensión**, el concepto de **rigidez**, el **análisis de espaciado de puntos**[1], **los exponentes de escalado**, la **entropía métrica, exponentes de Lyapunov**, y aún otros. La definición de medida de Lebesgue puede verse en un sinnúmero de textos por lo que aquí no nos ocuparemos de este concepto. Vea por ejemplo el excelente libto [13]. Tampoco prestaremos atención a todos los demás cuantificadores de la *extrañeza* de un conjunto.

En el presente trabajo nos limitaremos a conjuntos sobre la recta real y a los conceptos de dimensión dependiente del índice q-D(q)- y al concepto de rigidez. En estos dos conceptos sucede que su introducción y aplicación ha ocurrido en conjuntos que se saben extraños pues tienen una distribución de puntos que sigue una Escalera del Diablo. Desde el punto de vista metodológico nos parece importante analizar qué sucede con estos conceptos en conjuntos no extraños, cuya distribución de puntos tenga propiedades analíticas más convencionales.

Por completitud comentaremos la aplicación de estos dos conceptos al conjunto que en muchos aspectos es el prototipo de conjunto extraño: el conjunto de Cantor, para después pasar a nuestro objetivo fundamental. Demostraremos que los conjuntos con densidad de puntos integrada[2] diferenciable poseen dimensión igual a la unidad para todo q y una rigidez que tiende a cero con el ancho del intervalo L como L a la cuarta potencia. Estos serían conjuntos normales o no extraños.

Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor se define de una manera relativamente simple: partimos del intervalo [0,1] de la recta real, lo dividimos en tres partes iguales y nos quedamos con los dos intervalos extremos ([0, 1/3] y [2/3, 1]); con cada uno de estos dos intervalos repetimos la operación y tenemos entonces cuatro intervalos ([0, 1/9], [2/9, 1/3], [6/9, 7/9] y [8/9, 1]); el conjunto de Cantor es el límite de este procedimiento cuando hacemos la operación infinitas veces. Por comodidad llamaremos Conjunto de Cantor de

[1]LSA, o *Level Spacing Analysis*, en inglés.
[2]IDOP, o *Integrated Density of Points*, en inglés.

orden n, C_n, al conjunto que se obtiene después de aplicar n veces la regla, de manera que

$C_0 = [0,1]$,

$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$,

y así sucesivamente.

Resulta útil definir otros conjuntos de manera similar. Así, por ejemplo, podemos realizar el procedimiento partiendo de otros intervalos y/o haciendo la división en tres partes no iguales, o en otro número de partes, etc. Muchos de estos conjuntos obtenidos por pequeñas modificaciones del procedimiento tienen propiedades iguales o muy semejantes al conjunto de Cantor *canónico*.

Aquí nos limitaremos a mencionar que está probado que el conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue cero [13].

La frase *conjunto de Cantor* se usa también en un sentido más amplio para designar a cualquier conjunto con ciertas propiedades topológicas generales aunque no haya sido generado por ninguna regla similar a la del conjunto de Cantor canónico [14]. En el presente trabajo nos bastará la definición en sentido estrecho.

Es un hecho conocido que los conjuntos de Cantor, y con ellos todos los denominados extraños, poseen una IDOP con la forma de *Escalera del Diablo*. Este hecho es importante para lo que sigue pues asumiremos que los conjuntos no extraños son esencialmente aquellos cuya IDOP es diferenciable y por lo tanto se pueden describir por una densidad de puntos.

Dimensión D(Q)

Dado un conjunto de puntos de la recta real, y un sistema de cajas disjuntas de ancho δ cuya unión cubra a todo el conjunto, su distribución se puede describir a través de las cantidades p_j que dan la proporción de puntos del conjunto que están en la caja j-ésima. Entonces se define la dimensión D(q) como

$$D(q) = \frac{-1}{1-q}\lim_{\delta\to 0}\frac{\log \Sigma p_j^q}{\log \delta}$$

La aplicación directa de esta definición al conjunto de cantor canónico da que

$$D^{\text{Cantor}}(q) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

para todo q.

Veamos ahora qué pasa en el caso de un conjunto no extraño. Con un sencillo cálculo se puede probar que si la IDOP es derivable esta dimensión es igual a uno para todo q. En efecto, en dicho caso la derivada de la IDOP sería una densidad de puntos normalizada a la unidad $\Omega(x)$, de manera que en un entorno de un punto x_j habría una proporción de puntos del conjunto dada por

$$p_j = \Omega(x_j)\delta$$

donde Ω es la Densidad de Puntos del conjunto y Ω es la derivada de la IDOD. Entonces

$$D(q) = \frac{-1}{1-q}\lim_{\delta\to 0}\frac{\log \Sigma p_j^q}{\log \delta} =$$

$$D(q) = \frac{-1}{1-q}\lim_{\delta\to 0}\frac{\log \Sigma \Omega_j^q \delta^q}{\log \delta} =$$

$$D(q) = \frac{-1}{1-q}\lim_{\delta\to 0}\frac{\log \Sigma \Omega_j^q \delta + \log \delta^{q-1}}{\log \delta} = 1$$

En este último paso hemos usado que $\Sigma\Omega_j^q\delta$ es la suma de Riemann de la integral de Ω^q.

Rigidez

Supongamos que tenemos un conjunto de puntos caracterizado por la IDOP P(x). Llamemos L a un intervalo del eje real contenido totalmente en el dominio de P(x). Entonces se define la rigidez como

$$A(L) = \frac{1}{L}\min_{A,B}\int [P(x) - Ax - B]^2 dx$$

La integral se extiende al intervalo L en cuestión. No conocemos que se haya estudiado la rigidez de un conjunto de origen geométrico como el de Cantor. Se conocen los casos límite para Δ de algunos sistemas físicos. En particular de la teoría de Matrices Aleatorias, se sabe que esta tiende a cero con la longitud del intervalo [15, 16]. Veamos entonces qué pasa con un conjunto no extraño.

Supongamos que la IDOP de nuestro conjunto es diferenciable. Entonces,

$$P(x) = P(0) + P'(O)x + o(x)$$

donde o(x) es un infinitésimo de orden superior a x, normalmente de orden x^2. Sustituyendo esta expresión para la IDOP en la definición de Rigidez llegamos a que los coeficientes A y B que hacen mínima la integral valen precisamente P(O) y P'(O). Y de aquí resulta fácilmente que la rigidez se anula para L = 0, y tiende a este valor según la cuarta potencia de la longitud del intervalo. Pudiera pasar que el término cuadrático en el desarrollo de P(x) se anule. La rigidez entonces tendería a cero según la potencia 2m de L, siendo m la potencia del primer término no nulo.

Se puede probar también fácilmente que una definición más general, poniendo polinomios de orden n en lugar de rectas, da un resultado semejante con una potencia que es igual a L^{2n}.

Debemos señalar que la suposición anterior es también válida para la IDOP de conjuntos extraños, tomando la parte suave (continua) de ésta después de un procedimiento de "*unfolding*" [16].

CONCLUSIONES

La caracterización topológica de conjuntos extraños es hoy día una herramienta ineludible para la Física y la Matemática. Desde el punto de vista metodológico es importante saber qué valores toman las magnitudes que se introducen para caracterizar la *extrañeza* en el caso de conjuntos no extraños. De ahí nuestro interés en calcular la dimensión fractal D(q) y la rigidez □ para conjuntos no extraños. Hemos probado que un conjunto *normal* tiene D(q) = 1 para todo q, y que la rigidez de estos conjuntos tiende a cero como L^4.

AGRADECIMIENTOS

Dos de los autores (C.T.H. y R.P.A.) agradecen numerosas y estimulantes discusiones con Federico García Moliner y Víctor R. Velasco, así como la hospitalidad de la Universidad *Jaume I*, Castellón de la Plana, España, donde parte de este trabajo fue realizado.

REFERENCIAS

[1] PEREZ ALVAREZ, R. and F. GARCIA MOLINER (2001): "Quasiregular Heterostructures", capítulo invitado en "Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics", **Nova Science Publishers**, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-.Sager.

[2] MACIA, E. and F. DOMINGUEZ ADAME (2000): "Electrons, phonons and excitons in low dimensional aperiodic systems", Madrid, Editorial Complutense.

[3] PEREZ ALVAREZ, R.; F. GARCIA MOLINER and V.R. VELASCO (2001): "Some elementary questions in the theory of quasiperiodic heterostructures", **Journal of Physics: Condensed Matter**, 13, 3689-3698.

[4] HALSEY, T.C.; M.H. JENSEN, L.P. KADANOFF, I. PROCACCIA and B.I. SHRAIMAN (1986): "Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets", **Phys. Rev. A** 33, 1141-1151.

[5] MARTIN RODRIGUEZ, A. (2000): "Análisis fractal: algunas aplicaciones", **Revista Cubana de Física**, 17(1,2), 47-49.

[6] PEREZ ALVAREZ, R.; C. TRALLERO-HERRERO and F. GARCIA MOLINER: "1D Transfer Matrices", Aceptado en **European Journal of Physics**.

[7] MANDELBROT, B.B. (1983): "The Fractal Geometry of Nature", eds WH Freeman and Company, New York.

[8] KAPLAN, D.E. and L. GLASS (1995): "Understanding nonlinear dynamics", Springer Verlag, New York.

[9] MOON, F.C. (1992): "Chaotic and fractal dynamics", Wiley-Interscience, New York.

[10] OTT, E.O. (1993): "Chaos in dynamical systems", Cambridge University Press.

[11] HILBORN, R.C. (1994): "Chaos and nonlinear dynamics", Oxford University Press.

[12] RASBAND, S.N. (1997): "Chaos dynamics of nonlinear systems", Wiley Professional Paperback Series.

[13] WILCOX, H.J. and D.L. MYERS (1994): "An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series", **Dover Publications Inc**.

[14] KURATOWSKY, K. (1967): "Set Theory and Topology", edición Revolucionaria, La Habana.

[15] LOPEZ ARIAS, MT.; V.R. MANFREDI and L. SALASNICH (1994). "From regular to chaotic states in atomic nuclei", **Rivista del Nuevo Cimento**, 17(5), 1-45.

[16] GHUR, T.; A. MÜLLER-GROELING and H.A. WEIDENMÜLLER (1998): **Phys. Rep**. 299, 189.