

ESTUDIO TEORICO DE UNA SUCESION TERNARIA NO FIBONACCI

Y. Mutomba, G. Tichadini, and R. Pérez-Alvarez

Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Cuba

RESUMEN

Analizamos una Sucesión Ternaria No-Fibonacci, y estudiamos el carácter del espectro para problemas simples. Se demuestra el carácter Pisot, así como que los espectros de todos estos problemas son singulares continuos. Se reportan resultados numéricos para el caso de electrones en el marco de la Teoría de Masa Efectiva.

ABSTRACT

We analyze a Ternary Non-Fibonacci Sequence and analyse the character of the spectrum for simple problems. We prove the Pisot character of this sequence. It is shown that the spectra of all these problems are singular continuous. A numerical test is given for the case of electrons in the framework of the Effective Mass Theory.

INTRODUCCION

En los últimos 30 años se ha desarrollado ampliamente el estudio de los sistemas a muchas capas [1-5], tanto de materiales dieléctricos para propagación de ondas electromagnéticas, como de semiconductores, para dispositivos electrónicos. Esto se debe por una parte a las posibilidades que hoy día existen para obtener tales sistemas con muy buena calidad y control de todos sus parámetros. Por otro lado este auge es debido a las singulares propiedades y su posible uso práctico en dispositivos microelectrónicos, nanoelectrónicos y optoelectrónicos. Entre estos sistemas se destacan los Pozos Cuánticos, con unas pocas capas, las Superredes, teóricamente con infinitas capas, etc.

Más recientemente el interés se ha centrado en las llamadas Heteroestructuras Cuasiregulares (QH: *Quasiregular Heterostructures*) [6-8]. Estas consisten en una sucesión de capas construida de acuerdo con cierta regla de sustitución, de manera que resulta un sistema no periódico pero con un algoritmo preciso de secuenciación de las distintas capas (QS: *Quasiregular Sequences*). Entre las QS más estudiadas están las de Fibonacci, Thue Morse, Rudin-Shapiro, etc. La de Fibonacci, por ejemplo, se forma según la regla de sustitución

$$\xi_{\text{FIBO}}(A) = BA$$

$$\xi_{\text{FIBO}}(B) = A$$

Si partimos por ejemplo de una sola capa de material A, tendremos la primera generación $A_1 = A$. Aplicando la regla sucesivamente tendremos

$$A_2 = BA,$$

$$A_3 = ABA,$$

$$A_4 = BAABA,$$

$$A_5 = ABABAABA,$$

etc.

La QH de Fibonacci es A_n . Se están investigando con bastante énfasis los posibles usos de las QHs en dispositivos [7]. Una de las propiedades más cautivantes de estos sistemas es que muchas excitaciones elementales tienen espectro singular continuo. Bajo condiciones bastante generales esta propiedad se ha demostrado en varias de estas QSs; la demostración no es válida para la Rudin Shapiro [6].

Con la vista fija en la posibilidad de obtener nuevas propiedades, en el presente trabajo analizamos una QS ternaria no-Fibonacci (TNFS: *Ternary Non-Fibonacci Sequence*). La elección específica se debe a que es una de las sucesiones ternarias más simples y que no ha sido estudiada hasta el momento. Demostramos su carácter Pisot. Seguidamente argumentamos teóricamente el hecho de que los espectros de problemas simples sobre tales estructuras son singulares continuos. Reportamos entonces resultados numéricos para espectros de electrones de conducción que ratifican esta conclusión. Por último formulamos algunas conclusiones.

QS Ternaria No-Fibonacci

La sucesión que nos interesa se define por las siguientes reglas de sustitución:

$$\xi(A) = AB$$

$$\xi(B) = BC$$

$$\xi(C) = A$$

O sea que se trata de la sucesión Ternaria que no es del tipo Fibonacci más simple. Las primeras generaciones son:

$$A_1 = A,$$

$$A_2 = AB,$$

$$A_3 = ABBC,$$

$$A_4 = ABBCBCA,$$

$$A_5 = ABBCBCABCAAB,$$

etc.

La matriz asociada a esta QS es

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

El determinante característico es

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1$$

Los ceros de este polinomio son los autovalores de la matriz, a saber:

$$\lambda_1 = 1,754888\dots$$

$$\lambda_2 = 0,12\dots + 0,74\dots i$$

$$\lambda_3 = 0,12\dots - 0,74\dots i$$

Este resultado parcial significa que nuestra secuencia tiene la propiedad Pisot ya que λ_1 es real y mayor que la unidad mientras que las dos restantes raíces tienen módulo menor que uno. Una consecuencia inmediata de la propiedad Pisot es que esta QS puede obtenerse por el método de corte y proyección (*cut and project*) [9,10].

Mapa de Trazas de la TNFS

Supongamos que estudiamos algún problema simple sobre nuestra QS, es decir el espectro de una excitación elemental que se describa por matrices de transferencia unimodulares 2×2 . Un ejemplo de estas excitaciones elementales puede ser el de los electrones descritos en el marco de la Teoría de Masa Efectiva.

La regla de sustitución induce una relación de recurrencia entre las distintas generaciones A_n , B_n y C_n , y entre las matrices de transferencia que caracterizan a estas generaciones (A_n , B_n , C_n). No es difícil llegar a que estas últimas son:

$$A_{n+1} = B_n A_n$$

$$B_{n+1} = C_n B_n$$

$$C_{n+1} = A_n$$

Por comodidad, y como es costumbre, estamos usando la misma letra para la generación y para su matriz de transferencia. Para los propósitos actuales estas matrices pueden ser la llamada *Full Transfer Matrix* M , la *Associated Transfer Matrix* T , o incluso la *Coefficient Transfer Matrix* K (vea [6] y las referencias que allí se dan); basta con que sean unimodulares y orden 2. Estas relaciones de recurrencia permiten definir relaciones de recurrencia entre las trazas de matrices de distintas palabras. Introduzcamos con ese objetivo las siguientes notaciones:

$$x_n = \text{Tr}[A_n]$$

$$y_n = \text{Tr}[B_n]$$

$$z_n = \text{Tr}[C_n]$$

$$r_n = \text{Tr}[B_n A_n]$$

$$s_n = \text{Tr}[C_n B_n]$$

$$v_n = \text{Tr}[A_n C_n]$$

$$w_n = \text{Tr}[B_n C_n A_n]$$

Un cálculo algo tedioso pero directo permite llegar al siguiente mapa de trazas de nuestra sucesión:

$$x_{n+1} = r_n$$

$$y_{n+1} = s_n$$

$$z_{n+1} = x_n$$

$$r_{n+1} = y_n w_n - v_n$$

$$s_{n+1} = w_n$$

$$v_{n+1} = x_n r_n - y_n$$

$$w_{n+1} = x_n y_n w_n - y_n s_n - x_n v_n + z_n$$

De aquí que el Léxico de esta QS sea el conjunto $L = \{A, B, C, AB, BC, CA, BCA\}$, de cardinal 7.

Aplicación del Teorema de Bovier-Ghez

Si tomamos A como letra generadora, entonces $\xi^2(A) = ABBC$, que contiene el cuadrado de la palabra B . Entonces el teorema de Bovier-Ghez [11,12] se aplica y el espectro de los problemas simples sobre esta QS resultan singulares continuos. El mapa de trazas reducido (f en [11,12]) está dado por:

$$x \rightarrow r$$

$$y \rightarrow s$$

$$z \rightarrow x$$

$$r \rightarrow y w$$

$$s \rightarrow w$$

$$v \rightarrow x r$$

$$w \rightarrow x y w$$

Este mapa de trazas puede verse directamente como la sustitución ϕ [11,12] con $C = \{x, y, r, s, w\}$. Es fácil probar que esta sustitución es semiprimitiva ya que ϕ mapea C en C^* $\phi^5(C)$ sólo contiene elementos de C , y para todo β del Léxico L $\phi^5(\beta)$

contiene todas las letras del Léxico. Además $\xi_5^2(A)$ tiene la letra cuadrada BB, como elemento del Léxico L. En resumidas cuentas, tenemos todas las hipótesis de los Teoremas 1 y 3 de BovierGhez [11,12].

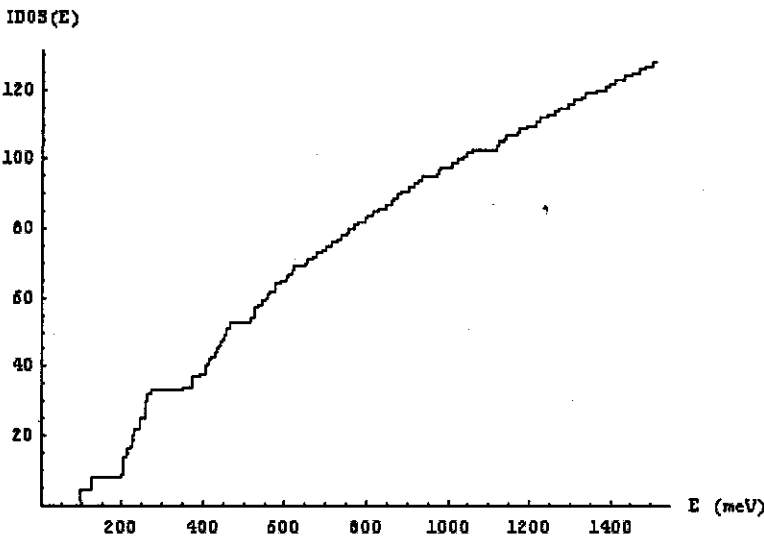
de 16,8 Å de GaAs, B es una capa de 8,4 Å de $Al_{0.2}Ga_{0.8}As$, y C es una capa de 16,8 Å de $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$. Los datos de los materiales y demás parámetros del cálculo se pueden ver en [6].

Espectro de electrones en una TNFS

Usando el mapa de trazas o la regla de sustitución para las matrices de transferencia es relativamente fácil calcular el espectro [6]. En la Figura 1 se presenta la IDOS (*Integrated Density of States*) de electrones de conducción para una décima generación de una TNFS donde A es una capa

Este espectro tiene aspecto de escalera del Diablo. Para comprobar su fractalidad calculamos su dimensión $D(q)$ para varios valores del índice q . En la Tabla adjunta se pueden ver los resultados.

q	D(q)
-2	1,00
-1	1,00
0	0,85
2	0,78
3	0,65
4	0,53
5	0,53
10	0,53
20	0,53



CONCLUSIONES

Hemos analizado la QS ternaria no Fibonacci más simple. Hemos demostrado que goza de la propiedad Pisot lo que la hace derivable de una red en una dimensión superior por el método de corte y proyección [6-10]. Reportamos su mapa de trazas y los principales momentos de la aplicación del teorema de Bovier-Ghez. De aquí se deriva sin más que el espectro de problemas simples sobre esta QS es singular continuo. Este resultado fue verificado en un ejemplo numérico de electrones en Teoría de Masa Efectiva donde se obtiene un espectro multifractal. Esto último implica que el espectro no es exactamente autosimilar ya que tiene una distribución no constante de exponentes de escalado.

REFERENCIAS

1. ESAKI, L. (1984): *J. Physique Colloques*, 45, C5-3.
2. BASTARD, G. (1989): "Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures", Éditions de Physique, Paris.
3. VINTER, B. and C. WEISBUCH (1991): "Quantum Semiconductor Structures", Academic Press, San Diego.
4. GARCIA-MOLINER, F. y otros (1994): "Electrones y Fonones en Pozos Cuánticos", editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, España.
5. GELLER, M.R. (2001): "Quantum phenomena in low-dimensional systems", <http://www.arXiv:cond-mat/0106256>.
6. PEREZ-ALVAREZ, R. and F. GARCIA-MOLINER (2001): "Quasiregular Heterostructures", capítulo invitado en "Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics", Nova Science Publishers, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-Sager.
7. MACIA, E. and F. DOMINGUEZ-ADAME (2000): "Electrons, phonons and excitons in low dimensional aperiodic systems", Madrid, Editorial Complutense.
8. International Workshop on Aperiodic Crystals, March 11-20, (1986): Les Houches, France. Edited by D Gratias and L Michel. *Journal de Physique*, 47, Colloque C3, supplément au No 7 (Juillet 1986).

9. BOMBIERI, E. and J.E. TAYLOR (1986): "Which distributions of matter diffract? An initial investigation", **J. de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au n° 7, C3-19-c3-28.
10. _____ (1987): "Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory; some preliminary connections", **Contemporary Mathematics** 64, 241-264.
11. BOVIER, A. and J.M. GHEZ (1993): **Commun. Math. Phys.** 58(1), 45.
12. _____ (1995): **J. Phys. A:Math. Gen.** 28, 2313.