ECUACION DE LORENTZ

J.H. Caltenco, J. López-Bonilla[1], Marco A. Martínez y A.S. Xeque-Morales
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, México DF

RESUMEN
Se muestra que la ecuación de Lorentz admite integración exacta cuando el campo electromagnético externo es constante. Para este fin se emplean los eigenvectores del tensor de Faraday y una ecuación diferencial de segundo orden para el vector tangente a la línea universo, originándose así un método más simple comparado con los procesos de Plebañski [1], Synge [2] y Piña [3].

ABSTRACT
We show that the Lorentz equation admits exact integration when the external electromagnetic field is constant. For such aim we employ the Faraday tensor and a 2th order differential equation for the tangent vector to world line, which is a process more simple than the methods of Plebañskï [1], Synge [2] and Piña [3].

1. INTRODUCCION

La trayectoria de una partícula en el espacio de Minkowski está dada por una sucesión de eventos $x_r(s)$:

$$x_1 = x\,,\ x_2 = y\,,\ x_3 = z\,,\ x_4 = it\,,\ i = \sqrt{-1} \qquad (1)$$

donde s es el tiempo propio y la velocidad de la luz en el vacío se ha reducido a la unidad. Entonces las correspondientes velocidad, aceleración y super aceleración nos quedan (emplearemos las cantidades y notación de Synge [2,4,5]) :

$$\lambda_r = \frac{dx_r}{ds}\,,\ \mu_r = \frac{d\lambda_r}{ds}\,,\ \nu_r = \frac{d\mu_r}{ds}$$
$$\lambda_r\lambda_r = -1,\ \mu_r\lambda_r = 0,\ \ \lambda_r\nu_r = -\mu_r\mu_r \qquad (2)$$

Si la partícula tiene una carga e, entonces la ecuación de Lorentz [4,6,7]:

$$\mu_r = bF_{rj}\lambda_j, \qquad b = \frac{e}{m} \qquad (3)$$

proporciona su interacción con un campo electromagnético extérno caracterizado por el tensor de Faraday [4,8]:

$$(F_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los vectores eléctrico y magnético, respectivamente. En la Sección 2 introducimos el tensor dual de Faraday, esto permite construir la clasificación de F_{ab} propuesta por Synge [2] y Piña [3], de fundamental relevancia en el estudio de las soluciones de (3).

Nuestro problema consiste en integrar la ecuación de Lorentz cuando F_{ac} es constante, lo cual puede hacerse mediante los enfoques:

a) Algebraico

Synge [2,9-11] demuestra que las curvaturas K_r, r = 1,2,3 de la línea universo son constantes, y de las fórmulas de Frenet-Serret [10-12] obtienen una ecuación diferencial de cuarto orden para la velocidad λ_r:

$$\frac{d^4}{ds^4}\lambda_r + \left(k_2^2 + k_3^2 - k_1^2\right)\frac{d^2}{ds^2}\lambda_r - k_1^2k_3^2\lambda_r = 0 \qquad (5)$$

cuya solución se apoya en el análisis algebraico de la correspondiente ecuación característica de Euler. Por lo tanto,

$$x_r(s) = x_r(0) + \int_0^s \lambda_r(\theta)d\theta \qquad (6)$$

proporciona la curva en términos de las condiciones iniciales $x_a(0)$ y $\lambda_a(0)$.

b) Tensorial

La integración de (3) es inmediata :

$$\lambda_r(s) = \exp\left(bsF_{rc}\right)\lambda_c(0) \qquad (7)$$

[1]E-mail: lopezbjl@hotmail.com

así Plebañski [1] y Piña [3] indican cómo calcular la función exponencial de una matriz (o tensor) antisimétrica. Esto determina a $\lambda_r(s)$, y nuevamente de (6) puede obtenerse la trayectoria.

En la Sección 3 exponemos un nuevo proceso (que hemos llamado método algebraico–tensorial) para resolver (3), el cual se apoya en los eigenvectores y valores propios del tensor de Faraday.

2. CLASIFICACION ALGEBRAICA DE F_{ab}

Mediante el símbolo ϵ_{armn} totalmente antisimétrico de Levi–Civita podemos construir el tensor dual de Faraday [4,8]:

$$^*F_{ac} = \frac{i}{2}\epsilon_{acmn}F_{mn}, \qquad (8)$$

con expresión matricial:

$$\left(^*F_{ac}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & iB_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & iB_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & iB_3 \\ -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Todo tensor antisimétrico y su dual satisfacen las identidades [1,3,8,13-15]:

$$F_{ra}F_{rc} - {}^*F_{ra}{}^*F_{rc} = \frac{I_1}{2}\delta_{ac}, \quad {}^*F_{ra}F_{rc} = \frac{I_2}{4}\delta_{ac} \qquad (10)$$

en donde:

$$I_1 = F_{ac}F_{ac} = 2\left(E^2 - B^2\right), \; I_2 = {}^*F_{ac}F_{ac} = 4\vec{E}\cdot\vec{B} \qquad (11)$$

son los únicos invariantes (bajo transformaciones de Lorentz) de F_{ij}, los cuales conducen a la clasificación del campo electromagnético introducida por Synge [2,8,10]:

$$\begin{aligned} &\text{Tipo A: } I_2 \neq 0 \\ &\text{Tipo B: } I_1 < 0,\; I_2 = 0 \\ &\text{Tipo C: } I_1 = 0,\; I_2 = 0 \text{ campo Nulo} \\ &\text{Tipo D: } I_1 > 0,\; I_2 = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Los casos indicados en (12) son de interés porque las características de la línea universo dependen del Tipo de F_{ac} y de las condiciones iniciales.

También podemos escribir (11) en la forma de Piña [3]:

$$I_1 = 2H\mathrm{Cos}\gamma,\; I_2 = 2H\mathrm{Sen}\gamma,\; H \geq 0,\; 0 \leq \gamma < 2\pi, \qquad (13)$$

así (12) nos queda:

$$\begin{aligned} &\text{Tipo A: } \gamma \neq 0,\ \pi, \qquad &&\text{Tipo B: } \gamma = \pi, \\ &\text{Tipo C: } H = 0, &&\text{Tipo D: } \gamma = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

El campo electromagnético es no – nulo si al menos uno de sus invariantes es distinto de cero, en este caso existen [4, 13, 16-18] dos eigenvectores nulos γ_r y η_r con valores propios $\pm\lambda$:

$$F_{rc}\gamma_c = \lambda\gamma_r, \; F_{rc}\eta_c = -\lambda\eta_r, \; \gamma_r\gamma_r = \eta_r\eta_r = 0,$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{4}\left(I_1^2 + I_2^2\right)^{1/2} = \frac{H}{2} > 0, \qquad (15)$$

$$\lambda = \left(\tilde{\lambda} - \frac{I_1}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{H}\mathrm{Sen}\frac{\gamma}{2} > 0,$$

lo cual permite expresar a F_{ij} y su dual en términos de sus direcciones principales nulas:

$$F_{rc} = \frac{1}{\gamma_a\eta_a}\left[\lambda\left(\gamma_r\eta_c - \gamma_c\eta_r\right) + i\beta\,\epsilon_{rcmn}\,\gamma_m\eta_n\right],$$

$$^*F_{rc} = \frac{1}{\gamma_a\eta_a}\left[-\beta\left(\gamma_r\eta_c - \gamma_c\eta_r\right) + i\lambda\,\epsilon_{rcmn}\,\gamma_m\eta_n\right], \qquad (16)$$

$$\beta = \epsilon\left(\tilde{\lambda} + \frac{I_1}{4}\right)^{1/2} = \epsilon\sqrt{H}\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2} \geq 0,\; \epsilon = \pm 1.$$

Nótese que siempre se tendrá $\gamma_a\eta_a \neq 0$ debido a la independencia lineal de dichos eigenvectores nulos.

3. METODO ALGEBRAICO–TENSORIAL

Este método no se ha localizado en la literatura y consideramos que es más simple y elemental que los procesos de [1-3] porque sólo involucra relaciones muy conocidas de álgebra tensorial.

En efecto, al emplear (10) en (3) resulta una ecuación diferencial de segundo orden para la aceleración de la carga:

$$\frac{d^2}{ds^2}\mu_r + \frac{b^2}{2}I_1\mu_r = -\frac{b^3}{4}I_2\,{}^*F_{rc}\lambda_c \qquad (17)$$

lo cual permite estudiar con facilidad los tipos B, C y D porque para ellos $I_2 = 0$, y una integración da:

$$\frac{d^2}{ds^2}\lambda_r + \frac{b^2}{2}I_1\lambda_r = \nu_r(0) + \frac{b^2}{2}I_1\lambda_r(0) \qquad (18)$$

de mayor simplicidad que (5). La naturaleza de las raíces α características de (18) depende del invariante I_1, por tanto :

Tipo B

$$\alpha = \pm b\lambda\,,\ \lambda = \sqrt{-\frac{I_1}{2}} > 0\,.$$

Entonces la 4 - velocidad solución de (18) es:

$$\lambda_r(s) = \lambda_r(0) - \frac{1}{b^2\lambda^2}\nu_r(0) + A_r e^{b\lambda S} + B_r e^{-b\lambda S} \qquad (19)$$

donde las constantes de integración A_r y B_r se determinan en función de las condiciones iniciales:

$$\mu_r(0) = bF_{rc}\lambda_c(0)\,,\quad \nu_r(0) = b^2F_{rc}F_{cn}\lambda_n(0) \qquad (20)$$

Si recordamos que $e^{\pm b\lambda S} = \mathrm{Cosh}(b\lambda s) \pm \mathrm{Senh}(b\lambda s)$, entonces (19) adquiere la forma:

$$\lambda_r(s) = \lambda_r(0) + \frac{1}{b\lambda}\mu_r(0)\mathrm{Senh}(b\lambda s) + \\ + \frac{1}{b^2\lambda^2}\nu_r(0)(\mathrm{Cosh}(b\lambda s) - 1),$$

y así (6) conduce a la trayectoria:

$$x_r(s) = x_r(0) + \Big[s\ \delta_{rn} + \frac{1}{b^2\lambda^2}(\mathrm{Cosh}(b\lambda s) - 1)F_{rn} + \\ + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{b\lambda}\mathrm{Senh}(b\lambda s) - s\right)F_{rc}\,F_{cn}\Big]\lambda_n(0) \qquad (21)$$

Tipo C

En estos casos $I_1 = 0$ y es trivial resolver la ecuación (18):

$$\lambda_r(s) = \lambda_r(0) + \mu_r(0)s + \nu_r(0)\frac{s^2}{2},$$

entonces (6) implica la línea universo:

$$x_r(s) = x_r(0) + \left(s\ \delta_{rn} + \frac{bs^2}{2}F_{rn} + \frac{b^2s^3}{6}F_{rc}\,F_{cn}\right)\lambda_n(0) \qquad (22)$$

Tipo D

$$\alpha = \pm i\beta\lambda\,, \qquad \beta = \sqrt{\frac{I_1}{2}} > 0\,.$$

Aquí (18) tiene la solución

$$\lambda_r(s) = \lambda_r(0) + \frac{1}{b\beta}\mu_r(0)\mathrm{Sen}(b\beta s) - , \\ - \frac{1}{b^2\beta^2}\nu_r(0)(\mathrm{Cos}(b\beta s) - 1)$$

de donde:

$$x_r(s) = x_r(0) + \Big[s\ \delta_{rn} - \frac{1}{b^2\beta^2}(\mathrm{Cos}(b\beta s) - 1)F_{rn} - \\ - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{b\beta}\mathrm{Sen}(n\beta s) - s\right)F_{rc}\,F_{cn}\Big]\lambda_n(0) \qquad (23)$$

Ahora sólo nos resta considerar el tipo A y para este fin debemos analizar un poco más el miembro derecho de (17). Las expresiones (16) permiten escribir al tensor de Faraday en función de su dual si en ellas eliminamos el símbolo de Levi–Civita, en efecto:

$${}^*F_{rc} = \frac{\lambda}{\beta}F_{rc} - \frac{1}{\gamma_a\eta_a}\left(\beta + \frac{\lambda^2}{\beta}\right)(\gamma_r\eta_c - \gamma_c\eta_r)$$

que al sustituir junto con (3) en (17) implica

$$\frac{d^2}{ds^2}\mu_r + b^2H^2\mathrm{Cos}^2\frac{\gamma}{2}\mu_r = f_r(s) \qquad (24)$$

en donde

$$f_r(s) = \frac{b^3\lambda\tilde{\lambda}}{\gamma_a\eta_a}(\gamma_r\eta_c - \gamma_c\eta_r)\lambda_c\,. \qquad (25)$$

Sin embargo de (3) y (15) es fácil ver que:

$$\gamma_c\lambda_c = \lambda_c(0)\gamma_c e^{-b\lambda S}\,,\quad \eta_c\lambda_c = \lambda_c(0)\eta_c e^{b\lambda S}$$

que en unión de (15) y (16) determinan $f_r(s)$ vía (25):

$$f_r(s) = M_r\mathrm{Cosh}(b\lambda s) + N_r\mathrm{Senh}(b\lambda s),$$

$$M_r = b^3\left(\lambda^2F_{rc} - \frac{I_2}{4}{}^*F_{rc}\right)\lambda_c(0), \qquad (26)$$

$$N_r = b^3\lambda\left[\left(\tilde{\lambda} + \frac{I_1}{4}\right)\delta_{rc} - F_{rm}\ \ F_{cn}\right]\lambda_c(0).$$

Sustituyendo (26) en (24) se logra la solución:

$$\mu_r(s) = B_r\mathrm{Cosh}\left(bHs\cdot\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}\right) + C_r\mathrm{Sen}\left(bHs\cdot\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2b^2\tilde{\lambda}}f_r(s),$$

$$B_r = \mu_r(0) - \frac{1}{2b^2\tilde{\lambda}} M_r, \qquad (27)$$

$$C_r = \frac{1}{bH\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}}\left(\nu_r(0) - \frac{\lambda}{2b\tilde{\lambda}} N_r\right),$$

generándose así la trayectoria:

$$x_r(s) = x_r(0) - \frac{1}{bH\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}}\left[\left(\mathrm{Cos}\left(bHs\cdot\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}\right) - 1\right)B_r - \right. \qquad (28)$$

$$\left. - \mathrm{Sen}\left(bHs\cdot\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}\right)C_r\right] + \frac{1}{2b^4\lambda^2\tilde{\lambda}}\left(f_r(s) - M_r\right)$$

en donde se ha empleado la identidad:

$$\lambda_r(0) + \frac{1}{bH\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{2}} C_r - \frac{1}{2b^3\lambda\tilde{\lambda}} N_r = 0 \qquad (29)$$

con $\mu_r(0)$ y $\nu_r(0)$ dadas por (20).

Así queda completamente resuelto el movimiento de una carga puntual bajo los diversos tipos de campos electromagnéticos constantes. Nuestras expresiones (21), (22), (23) y (28) coinciden con las relaciones (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9) de Piña [3].

REFERENCIAS

1. J. PLEBAÑSKI, J. (1961): **Bull. Acad. Polon. Sci. Cl**. 9, 587-593.
2. SYNGE, J.L. (1967): **Proc. R. Irish Acad**. A65, 27.
3. PIÑA, E. (1967): **Rev. Mex. Fís**. 16, 233.
4. SYNGE, J. L. (1965): Relativity: The special theory, North Holland Pub; Amsterdam, Chap.9
5. _____ (1970): **Ann. Mat. Pura Appl**. 84, 33.
6. INFELD, L. and P.R. WALLACE (1940): **Phys. Rev**. 57, 797.
7. ANDERSON, J.L. (1967): Principles of relativity Physics, Academic Press, NY.
8. LOPEZ –BONILLA, J. (1985): **Rev. Colomb. Fís**. 17, 1.
9. HONIG, E.; E.L. SCHUCKING and C.V. VISHVESHWARA (1974): **J. Math Phys**. 15, 774.
10. LOPEZ– BONILLA, J.; G. OVANDO and J. RIVERA (1997): **Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)**, 107, 43
11. LOPEZ – BONILLA, J.; G. OVANDO and J. RIVERA (1999): **J. Moscow Phys. Soc**. 9, 83.
12. LANCZOS, C. (1970): Space through the ages, Academic Press, London (1970)
13. RAINICH, G.Y. (1925): **Trans. Am. Math. Soc**. 27, 106.
14. WHEELER, J.A. (1962): Geometrodynamics, Academic Press NY.
15. PENNEY, R. (1964): **J. Math. Phys**. 5, 1431.
16. SYNGE, J.L. (1935): Univ. Toronto Stud. Appl. Math. Ser., 1.
17. LUDWIG, G. (1969): **Am. J. Phys**. 37, 1225.
18. SINGH, K. P. and S.R. ROY (1972): **Indian J. Pure Appl. Math**. 3, 532.