

DIFRACCION DE ONDAS ACUSTICAS TRANSVERSALES EN PIEZOCOMPUESTOS LAMINADOS

H. Calás y J. A. Otero, Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF), Cuba

G. Monsiváis, Instituto de Física, UNAM, México

R. Rodríguez-Ramos, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la difracción de ondas acústicas transversales en piezocompuestos laminados 2-2 para incidencia oblicua. Se emplea el formalismo de la matriz de transferencia para la obtención del coeficiente de reflexión del sistema. La celda elemental del piezocompuesto está formada por dos tipos de materiales: piezoeléctrico (PZT) y polímero Araldite. Se muestra el comportamiento del coeficiente de reflexión con respecto a la frecuencia, al ángulo de incidencia y a la fracción volumétrica de la fase piezoeléctrica.

ABSTRACT

In the present work the diffraction of the transverse acoustic waves in laminate piezocomposite 2-2 for the oblique incidence is studied. The method of the transference matrix for the calculations of the reflection coefficient of the system is applied. The elemental cell of the piezocomposite is formed for two type of materials: piezoelectric (PZT) and the polymer Araldite. The behavior of the reflection coefficient with respect to the frequency, angle of incidence of the wave and the volume fraction of the piezoelectric phase is shown.

INTRODUCCION

El estudio de la propagación de ondas acústicas en sistemas laminados ha recibido particular atención en los últimos años. Se ha publicado gran número de trabajos con diferentes enfoques, abordándose las propiedades de los fonones acústicos y las ondas elásticas en superredes [1-2], la propagación de ondas de Lamb en sistemas laminados [3] y la propagación de ondas acústicas en superredes de materiales ferroeléctricos [4], entre otros.

Un instrumento teórico adecuado para el estudio de sistemas de este tipo es el formalismo de la matriz de transferencia [2]. Estudios en esta dirección se han desarrollado para ondas de Lamb en superredes periódicas formadas por materiales puramente elásticos [2], donde la matriz de transferencia es de 2×2 . Se han llevado a cabo investigaciones sobre la propagación de ondas elásticas en sistemas periódicos, donde el acoplamiento electromecánico y los efectos piezoeléctricos trae como consecuencia un aumento de rango en la matriz de transferencia que será de 4×4 para ondas de polarización puramente transversal [3]. A estas ondas, también conocidas por SH (Shear Horizontal), será a las que dedicaremos nuestro estudio. El tratamiento según la matriz de transferencia se torna más complejo para los materiales piezoeléctricos. A L. Shuvalov y A. S. Gorkunova [3] desarrollaron un formalismo para la obtención analítica de los coeficientes de reflexión y transmisión en un sistema periódico formado por láminas de un material ferroeléctrico polarizando una lámina respecto a la otra 180° . Los coeficientes materiales en esta estructura se simplifican grande-

mente puesto que las propiedades mecánicas y las propiedades eléctricas se mantienen constantes de una lámina a otra.

En el presente trabajo, pretendemos extender el estudio de sistemas laminados al caso de los materiales piezocompuestos, en los cuales se tiene en cuenta el acoplamiento electromecánico. Para los piezocompuestos donde se alternan materiales piezocerámicos y polímeros, la existencia del polímero afecta notablemente los coeficientes de reflexión (R) y transmisión (T) del sistema. La dependencia que tienen los coeficientes de transmisión y reflexión con la frecuencia, el número de láminas, el ángulo de incidencia y la fracción volumétrica de material piezoeléctrico en la celda elemental del compuesto es estudiada. Esta dependencia es de particular importancia en la construcción de dispositivos, pues en función de la fracción volumétrica que se tome las ondas transversales se transmitirán o no, a través del sistema.

DESARROLLO TEORICO

La propagación de ondas en materiales piezoeléctricos está regida por las ecuaciones constitutivas, en combinación con las ecuaciones de movimiento en el mismo.

$$\begin{bmatrix} T_j \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{jk} & -e_{ji}^+ \\ e_{ik} & \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_k \\ E_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{T} = \rho \ddot{u}_i, \quad \nabla \vec{D} = 0, \quad (2)$$

donde, $j, k = 1..6$ y $l, i = 1..3$. T_j es el tensor de tensiones mecánicas, S_i el tensor de deformaciones D_j el vector de inducción eléctrica y E el vector intensidad de campo eléctrico. Debido a la simetría que presentan los tensores de las magnitudes físicas se ha reducido el orden de los mismos empleando el siguiente convenio: 11 = 1, 22 = 2, 33 = 3, 23 = 4, 13 = 5, 12 = 6.

Abordaremos el estudio de un sistema periódico compuesto por materiales piezoeléctricos de simetría 6 mm. Se tomó el eje de polarización del cristal en la dirección del eje z y paralelo a las intercaras. El eje y del sistema coordenado lo tomaremos perpendicular a las intercaras, según se muestra en la Figura 1. El sistema de ecuaciones que describen los materiales piezoeléctricos para la configuración que estamos abordando se desacopla en dos modos, conocidos en la literatura como: SH (Shear Horizontal) y SV (Shear Vertical). Los efectos piezoeléctricos se muestran sólo en los modos SH que son los que estudiamos a continuación. El ancho de las láminas las tomaremos como d_A y d_B siendo el ancho de cada celda $D = d_A + d_B$ y la dimensión del compuesto $L = ND$, donde N es el número del celdas (Figura 1).

Los modos SH contienen sólo la componente u_3 del desplazamiento mecánico y el potencial eléctrico ϕ los cuales no dependen de la coordenada x_3 ($\partial/\partial x_3 = 0$). Partiendo de las ecuaciones (1) y (2) podemos escribir las ecuaciones de onda para una porción homogénea del material

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \ddot{u}_3, \quad (3)$$

$$e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^s \nabla^2 \phi = 0,$$

donde

∇^2 es el operador de Laplace $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$,

ρ es la densidad de masa, c_{44}^E , e_{15} y ε_{11}^s son las constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas, respectivamente. La solución de las ecuaciones (3) está sujeta a las condiciones de contorno siguientes en cada intercara

$$u_3^{n-1} \Big|_{y=y_n} = u_3^n \Big|_{y=y_n} \quad (4)$$

$$\bar{T}^{n-1} \cdot \hat{n} \Big|_{y=y_n} = \bar{T}^n \cdot \hat{n} \Big|_{y=y_1} \quad (5)$$

$$\phi^{n-1} \Big|_{y=y_n} = \phi^n \Big|_{y=y_n} \quad (6)$$

$$\bar{D}^{n-1} \cdot \hat{n} \Big|_{y=y_n} = \bar{D}^n \cdot \hat{n} \Big|_{y=y_n}; n = 1 \dots N \quad (7)$$

Las magnitudes físicas en la celda n -ésima las podemos escribir en forma de vector columna y relacionarla con las amplitudes parciales de las ondas A_t, A_r, A_{s+}, A_{s-} a través de una matriz que sólo depende de las características del medio que forma la lámina. Los subíndices t, r, s^+, s^- están asignados respectivamente a las amplitudes parciales de las ondas transmitida, reflejada y a dos ondas en la interfase

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ \phi \\ T_4 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{e_j}{\varepsilon_j} & \frac{e_j}{\varepsilon_j} & 1 & 1 \\ ik_{2j} c'_j & -ik_{2j} c_j & k_1 e_j & -k_1 e_j \\ 0 & 0 & k_1 \varepsilon_j & -k_1 \varepsilon_j \end{bmatrix}_j \cdot \begin{bmatrix} A_t^j e^{ik_{2j}(y-y_j)} \\ A_r^j e^{-ik_{2j}(y-y_j)} \\ A_{s-}^j e^{-ik_1(y-y_j)} \\ A_{s+}^j e^{ik_1(y-y_j)} \end{bmatrix}_j \quad (8)$$

La exponencial $e^{i(k_1 x_1 - \omega t)}$ común a todos los términos es considerada implícitamente. Se asume la notación, $c_j = c_{44j} + (e_{15j}^2 / \varepsilon_{11j})$, $e_j = \varepsilon_{15j}$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{11j}$, aquí el subíndice j indica la lámina j . La componente k_x del vector de onda es la misma para todas las láminas.

Haciendo uso de las condiciones de contorno (4) - (7) y de la ecuación (8) podemos relacionar los coeficientes a ambos lados de las intercaras mediante una matriz de transferencia

$$\begin{pmatrix} A_i \\ A_r \\ A_{s+} \\ A_{s-} \end{pmatrix}^{(n-1)} = M_n \begin{pmatrix} A_t \\ A_r \\ A_{s+} \\ A_{s-} \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} A_i \\ A_r \\ 0 \\ A_{s-} \end{pmatrix}^{(en)} = \Gamma_n \begin{pmatrix} A_t \\ 0 \\ A_{s+} \\ 0 \end{pmatrix}^{(ex)},$$

donde $A_i^{(en)}, A_r^{(en)}, A_t^{(ex)}$ son las amplitudes de las ondas SH incidente, reflejada y transmitida mientras que A_{s-} y A_{s+} son las amplitudes de las ondas superficiales que sólo se manifiestan en el potencial. La matriz que transfiere los coeficientes de una lámina a otra es M_n y tiene la siguiente forma:

$$M_n = \begin{bmatrix} q_1^{(n)} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} & q_2^{(n)} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} & q_3^{(n)} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} & -q_3^{(n)} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} \\ q_2^{(n)} e^{ik_{n-1}d_{n-1}} & q_1^{(n)} e^{ik_{n-1}d_{n-1}} & -q_3^{(n)} e^{ik_{n-1}d_{n-1}} & q_3^{(n)} e^{ik_{n-1}d_{n-1}} \\ q_4^{(n)} e^{k_j d_{n-1}} & q_4^{(n)} e^{k_j d_{n-1}} & q_5^{(n)} e^{k_j d_{n-1}} & q_6^{(n)} e^{k_j d_{n-1}} \\ q_4^{(n)} e^{-k_j d_{n-1}} & q_4^{(n)} e^{-k_j d_{n-1}} & q_6^{(n)} e^{-k_j d_{n-1}} & q_5^{(n)} e^{-k_j d_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde,

$$q_1^{(n)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_n c_n}{c_{n-1} k_{n-1}} \right),$$

$$q_2^{(n)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_n c_n}{c_{n-1} k_{n-1}} \right),$$

$$q_3^{(n)} = \frac{ik_1}{2k_{j-1}} \frac{e_n \varepsilon_{n-1} - e_{n-1} \varepsilon_n}{c_{n-1} \varepsilon_{n-1}},$$

$$q_4^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_n \varepsilon_{n-1} - e_{n-1} \varepsilon_n}{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}} \right),$$

$$q_5^{(n)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right),$$

$$q_6^{(n)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right). \quad (11)$$

Los coeficientes $q_1^{(n)}$ y $q_2^{(n)}$ relacionan las propiedades elásticas a ambos lados de la intercara, los coeficientes $q_3^{(n)}$ y $q_4^{(n)}$ relacionan el acoplamiento electromecánico a ambos lados de la intercara, los coeficientes $q_5^{(n)}$ y $q_6^{(n)}$ relacionan las propiedades dieléctricas a ambos lados de la intercara.

La matriz de transferencia del sistema completo está dada por:

$$\Gamma_N = \prod_{n=1}^N M_n; \quad (12)$$

Normalizando con respecto a la amplitud de la onda incidente obtenemos el coeficiente de reflexión $R = A_r/A_i$ en función de los términos de la matriz de transferencia

$$R = \frac{\Gamma_{21}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}\Gamma_{31}}{\Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}\Gamma_{31}} \quad (13)$$

Si consideramos los materiales A y B idénticos se obtiene una matriz diagonal de tal forma que solamente existirá onda transmitida.

Relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión

Los coeficientes T y R calculados relacionan las amplitudes de la onda incidente con la reflejada y la transmitida por el sistema. Para encontrar la relación entre los coeficientes T y R calculados, construiremos el vector de Poynting para estudiar el flujo de energía en el sistema. En el caso de los piezoeléctricos el vector de Poynting se escribe de la siguiente manera:

$$P = -\frac{v^* \cdot T}{2} + \frac{\phi(i\omega D)^*}{2} \quad (14)$$

Cuando las láminas están perpendiculares al eje y sólo nos interesa la parte real de la componente y del vector de Poynting y como u_1 y u_2 son cero, el vector de Poynting toma la forma:

$$P_2 = -\frac{v_3^* T_4}{2} + \frac{\phi(i\omega D_2^*)}{2} \quad (15)$$

Considerando las soluciones para u_3 , T_4 , ϕ y D_2 dadas en (7) obtenemos la componente y del vector de Poynting en los materiales de entrada y salida del sistema.

$$P_2 = \begin{cases} (1 - |R|^2) |C^0| |k_i|^2; & y < 0 \\ |T|^2 |C^n| |k_t|^2; & y > y_n \end{cases} \quad (16)$$

siendo $k_i = \left(\frac{\omega}{v_0} \right) \cos \theta_i$ y $k_t = \left(\frac{\omega}{v_n} \right) \cos \theta_t$. y. Los coeficientes calculados deben cumplir la siguiente relación:

$$1 = |R|^2 + |T|^2 \frac{|C^n|^2 \left(\frac{\omega}{v_n} \right)^2 \cos^2 \theta_t}{|C^0|^2 \left(\frac{\omega}{v_0} \right)^2 \cos^2 \theta_o} \quad (17)$$

Si el medio 0 (material de entrada) y el medio n (material de salida) son iguales, la expresión (17) se reduce a:

$$1 = |R|^2 + |T|^2. \quad (18)$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Estudiaremos el sistema que se muestra en la Figura 1, donde se tomará el medio A como PZT5A y el medio B como Araldite D. El medio exterior

(material de entrada y de salida) se tomará como un tercer medio el cual es piezoeléctrico del tipo PZT4. La dimensión del compuesto es $L = 10 \text{ mm}$ y se hará variar el número de láminas y la fracción volumétrica γ de PZT5A en la celda. El ancho de cada celda será L/N mientras el ancho de las láminas de piezoeléctrico d_A y las de polímero d_B estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$d_A = L\gamma / N \quad (19)$$

$$d_B = L(1-\gamma)/N \quad (20)$$

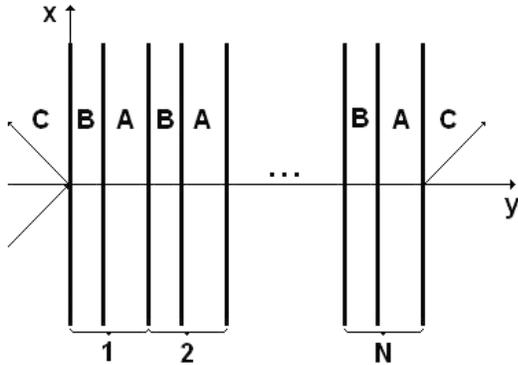


Figura 1. Piezocompuesto.

Los coeficientes de las magnitudes físicas (c , e , ϵ) que se emplearon en el cálculo se muestran en la Tabla I.

Tabla I. Propiedades de los materiales.

	c (N/m^2) $\times 10^2$	e (C/m^2)	ϵ / ϵ_0	ρ (kg/m^3) $\times 10^3$
PZT4	2,560	12,7	730	7,50
PZT5A	2,110	12,3	916	7,75
Araldite D	0,126	0	7	1,17

Para el caso $N = 5$ y frecuencia $\omega = 50 \text{ MHz}$ se muestra en la Figura 2 el comportamiento del coeficiente de reflexión R con respecto al ángulo de incidencia para cuatro diferentes fracciones volumétricas de PZT5A. Cuando $\gamma = 0$, toda la celda es polímero. Para este caso la reflexión es prácticamente completa para todos los valores del ángulo, excepto para algunos en los que hay picos de transmisión. Para $\gamma = 1$, la celda es de material piezoeléctrico y observamos transmisión para todos los ángulos. Para el caso en que γ se encuentre entre cero y uno, para cada fracción volumétrica se obtendrá un coeficiente de reflexión en función del ángulo.

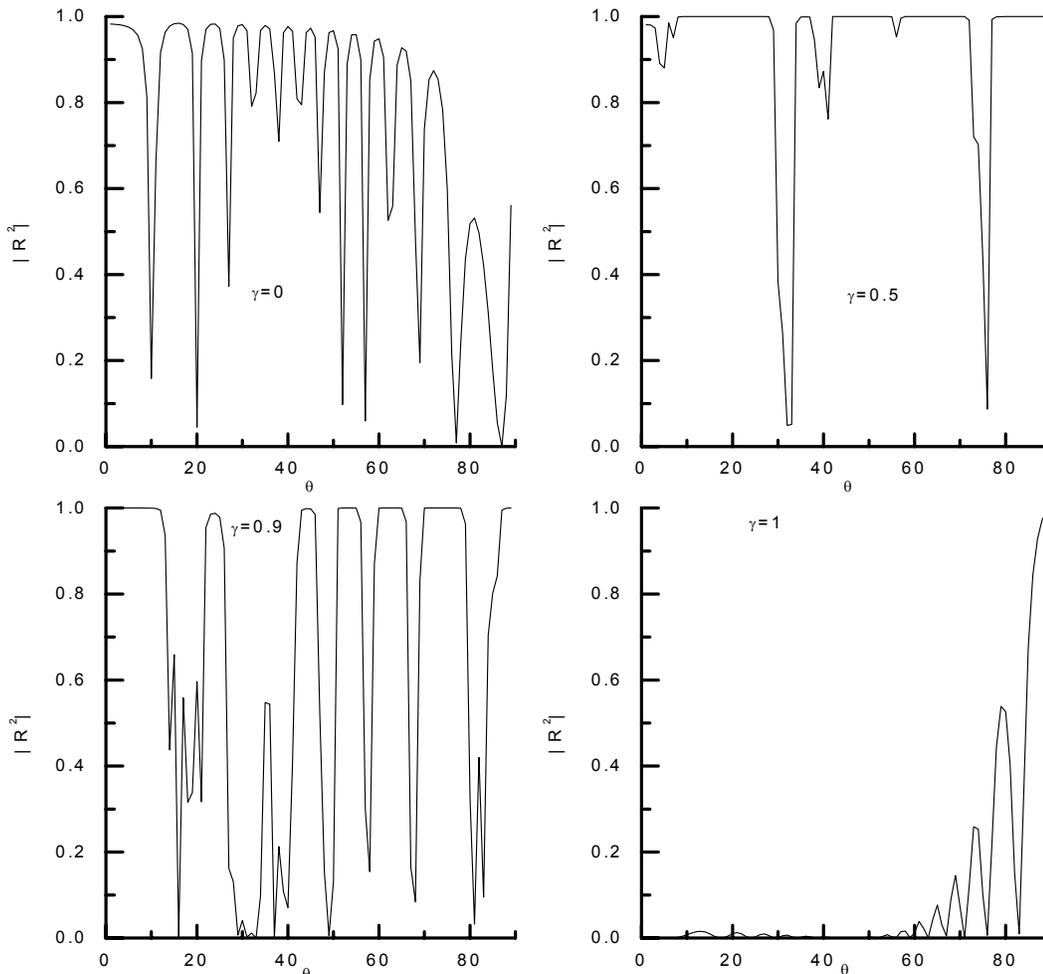


Figura 2. Evolución del coeficiente de reflexión con el ángulo para diferentes fracciones volumétricas γ .

Para poder evaluar con mayor facilidad la dependencia de la transmisión en el sistema con respecto a la fracción volumétrica, estudiaremos el caso de incidencia normal. En la Figura 3, mostramos el coeficiente de reflexión en función de la fracción volumétrica para incidencia normal y distintos números de celdas. Se aprecia que en determinados valores de fracción volumétrica aparecen picos de transmisión mientras que para el resto de los valores, toda la energía es reflejada. Al variar el número N de celdas, los valores de fracción volumétrica para los cuales hay transmisión cambian y varían en número. Esto se debe a que existe una diferencia grande de impedancia acústica entre PZT5A y el Araldite D. La transmisión será favorecida cuando el ancho de la fase polímero en la celda esté próximo a un número entero de media longitud de onda ($\lambda/2$). Bajo esta condición, tendremos que las fracciones volumétricas para las que habría transmisión en un sistema de N celdas, a una frecuencia fija ω , está dada por la siguiente expresión:

$$\gamma = 1 - \frac{\pi n v N}{L \omega} \quad (21)$$

donde n es el número de media longitud de onda, v la velocidad de propagación de las ondas en el polímero.

Este efecto se puede apreciar en la Figura 3, donde se señala a que longitud de onda corresponde cada pico. De (21) tenemos un límite de celdas para las que ocurrirá este efecto, pues γ debe ser menor que la unidad. En efecto,

$$N < \frac{L \omega}{\pi v} \quad (22)$$

Sin embargo, existen otros picos que están relacionados con las dimensiones de las láminas de piezocompuesto y las interacciones en las intercaras. En la Figura 3 para N = 4, podemos ver que junto al pico $2\lambda/2$ existen tres picos de transmisión que están asociados a las reflexiones en las láminas piezoeléctricas. Para un número muy grande de láminas la longitud de onda en el piezocerámico será mucho mayor que el ancho de las láminas, esto hará que la onda se comporte prácticamente como si el material piezoeléctrico no existiera.

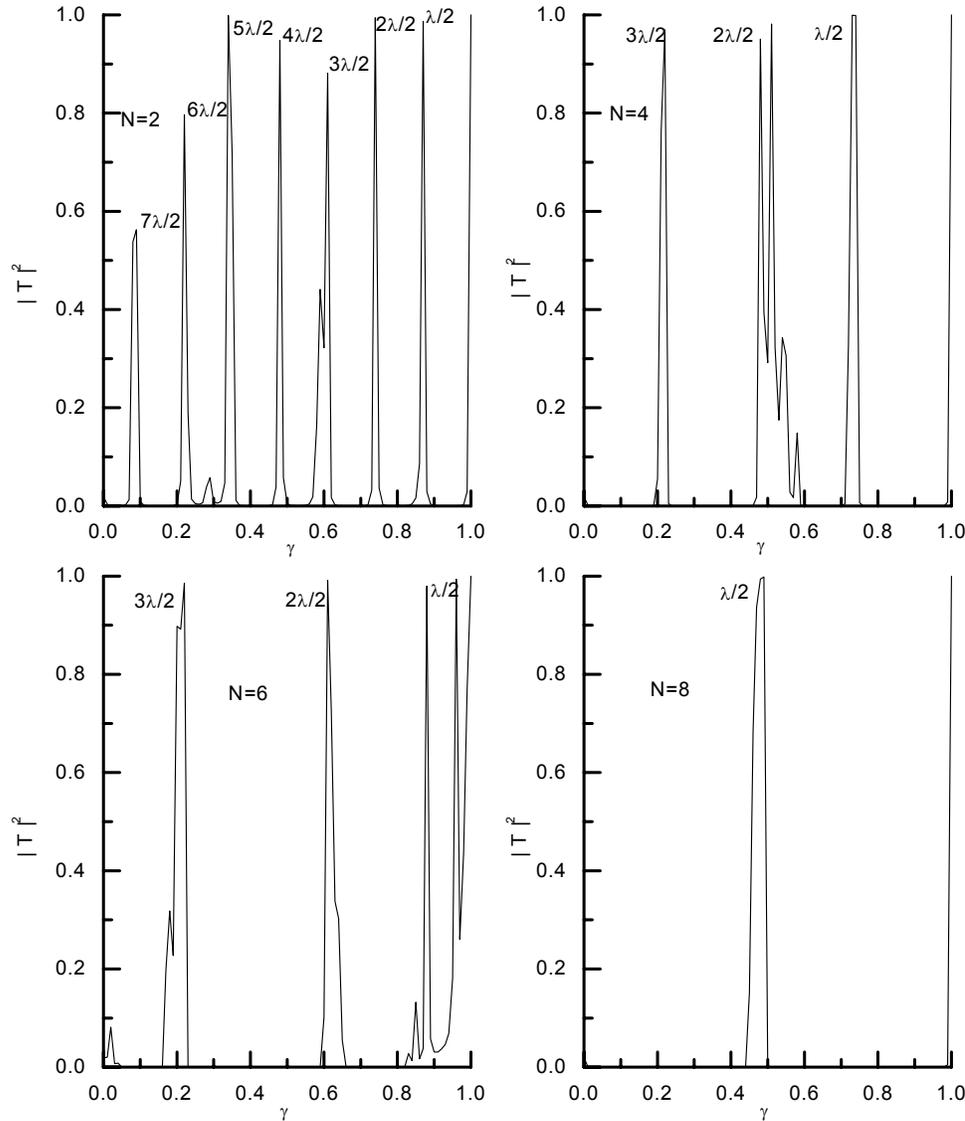


Figura 3. Evolución del coeficiente de transmisión en función de la fracción volumétrica γ para diferentes números de celdas, con incidencia normal.

Al tomar un caso de incidencia oblicua como el que se muestra en la Figura 4, la condición (22) no se cumple exactamente pues el recorrido de las ondas dentro de las láminas ahora es mayor que el ancho de las mismas. Esto provocará la aparición de nuevos picos y el corrimiento de los que existen en el caso de la incidencia normal.

Una condición similar a (22) puede ser obtenida para el caso de incidencia oblicua teniendo en cuenta la ley de Snell

$$\gamma = 1 - \frac{\pi n v N \sin(\theta_p)}{L \omega} \quad (23)$$

siendo θ_p el ángulo con que se propaga la onda dentro del polímero.

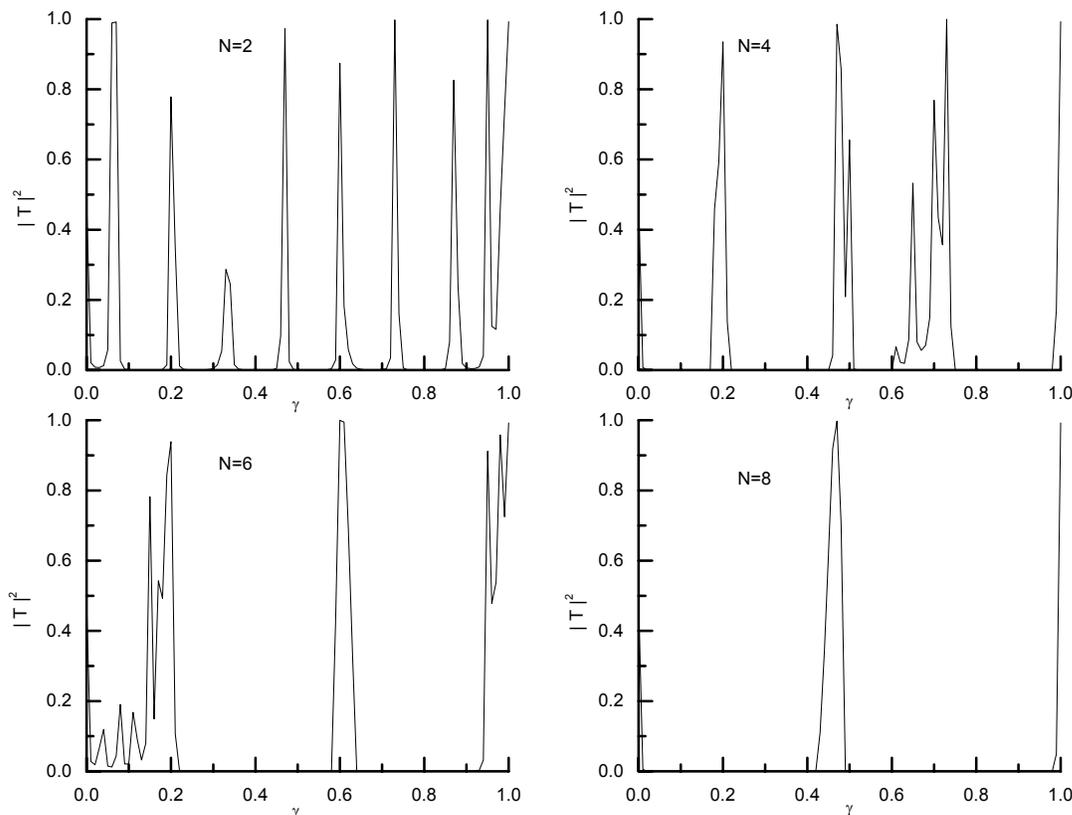


Figura 4. Evolución del coeficiente de transmisión en función de la fracción volumétrica γ para diferentes números de celdas, con incidencia de 30° .

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha estudiado la dispersión de ondas acústicas transversales en sistemas multilaminados piezocompuestos. Mostrándose el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para piezocompuestos con diferentes números de celdas, variando el ángulo y la fracción

volumétrica de los mismos. Se obtiene una expresión que permite orientarse en el momento de escoger qué espesor dar a un piezocompuesto y qué fracción volumétrica tomar en función de la frecuencia que se emplee para sus diferentes aplicaciones.

REFERENCIAS

1. BLEUSTEIN, J.L. (1968): **Appl. Phys. Letters** 13, 412.
2. MARFELD, C. and P.TOURNOIS (1971): **Appl. Phys. Lett.** 19, 117.
3. IKEDA, T. (1990): "Fundamentals of Piezoelectricity" (Oxford University Press, New York).
4. AULD, B.A. (1973): "Acoustic Wave and Fields in solids" (New York: Wileyand, Sons, 1).
5. SHUVALOV, A.L. and A.S.GORKUNOVA (1999): **Phys. Rev. B** 59, 9070.

