

DIFRACCION DE ONDAS HORIZONTALES TRANSVERSALES EN SUPERREDES PIEZOELECTRICAS DE FIBONACCI

J. A. Otero y H. Calás, Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF)

R. Rodríguez-Ramos, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

G. Monsiváis, Instituto de Física, UNAM, México

R. Pérez-Alvarez, Facultad de Física, Universidad de La Habana

RESUMEN

Basado en el formalismo de la matriz de transferencia estudiamos la difracción de ondas horizontales transversales en superredes piezoeléctricas. El sistema está compuesto por un conjunto de láminas formando una estructura cuasiperiódica de acuerdo con la secuencia de Fibonacci. Las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión son obtenidas. El espectro de difracción de cada estructura es mostrado.

ABSTRACT

Based on the formalism of the transfer matrix the diffraction of transverse horizontal waves in piezoelectric superlattices is studied. The system is composed for a set of layers forming a quasiperiodic structure according to the Fibonacci sequence. The expressions for the reflection and transmission coefficients are obtained. The diffraction spectrum of each structure is shown.

INTRODUCCION

El estudio de las propiedades acústicas en medios laminados es de gran interés para diferentes campos de investigaciones, tales como: geofísica, hidroacústica y en el diseño de materiales compuestos laminados [1]. En los últimos años el estudio de las superredes nanométricas ha despertado gran interés respecto a las propiedades de los fonones acústicos [2]. Un gran número de materiales utilizados para fabricar las superredes nanométricas tienen propiedades piezoeléctricas. Uno de los métodos aproximados más utilizados y que ha brindado soluciones a estos problemas de superredes es el método de la matriz de transferencia [3]. De las herramientas teóricas usadas para el estudio analítico exacto de diversos fenómenos de ondas en medios periódicos estratificados es el método de la matriz de transferencia basada en el formalismo de Bloch [4]. Sin embargo, los cálculos analíticos exactos se transforman en una vía muy engorrosa, una vez que la dimensión de la matriz es superior a 2x2 debido a los modos acoplados. En el caso de las ondas transversales horizontales (TH) en presencia de acople electromecánico, la matriz es de dimensión 4x4. El estudio de las ondas TH en estructuras laminadas periódicas, en la cual la celda periódica está formada por dos materiales piezoeléctricos polarizados a 180° uno del otro, fue realizado por Shuvalov [5]. En este trabajo se obtuvieron los coeficientes de reflexión y transmisión analíticamente, utilizando la matriz de transferencia con el formalismo de Bloch.

En nuestro trabajo, basados en el formalismo de la matriz de transferencia estudiamos la difracción de ondas transversales horizontales en superredes piezoeléctricas. El sistema está compuesto por un conjunto de láminas formando una estructura cuasiperiódica de acuerdo con la secuencia de Fibonacci [6,7], creada a partir de dos sistemas generadores A y B. Las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión son obtenidas. El espectro de difracción de cada estructura es mostrado. Los materiales piezoeléctricos utilizados tienen simetría hexagonal 6 mm (A = PZT4, B = PZT5A).

Ecuaciones fundamentales. Matriz de Transferencia

Supongamos que tenemos una estructura laminada formada por un conjunto de láminas que se yuxtaponen de acuerdo a la secuencia de Fibonacci en la dirección y. El sistema de coordenadas xyz es tomado de tal forma que el eje Oy se encuentre perpendicular a las intercaras de las láminas (Figura 1).

Las ecuaciones que describen las ondas acústicas planas que se propagan en el plano xy y están polarizadas a lo largo del eje z (ondas TH), para un material piezoeléctrico vienen dadas mediante las ecuaciones diferenciales

$$c_{44} \nabla^2 u_z + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$e_{15} \nabla^2 u_z - \epsilon_{11} \nabla^2 \phi = 0.$$

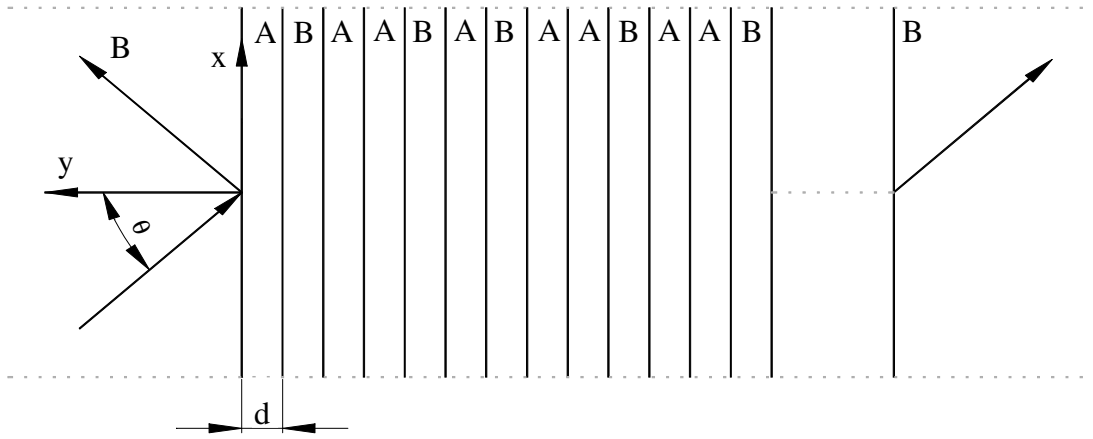


Figura 1. Superred de Fibonacci.

Aquí, ∇^2 es el operador diferencial de Laplace en el plano xy , u_z representa el desplazamiento en la dirección z , ϕ es el potencial eléctrico, ρ es la densidad volumétrica de masa y $c_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$ son las constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas, respectivamente.

Supongamos que la solución del sistema (1) está dado en la forma:

$$u_z = U \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \quad (2)$$

$$\phi = \Phi \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)]$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left[c_{44} (k_x^2 + k_y^2) - \rho \omega^2 \right] U + e_{15} (k_x^2 + k_y^2) \Phi = 0 \quad (3)$$

$$e_{15} (k_x^2 + k_y^2) U + \epsilon_{11} (k_x^2 + k_y^2) \Phi = 0.$$

Finalmente, obtenemos una ecuación característica de cuarto orden para el parámetro k_y , cuyas soluciones son:

$$k_y^{(1)} = K_y, k_y^{(2)} = -K_y, \text{ con } U = 1, \Phi = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}, \quad (4)$$

$$k_y^{(3)} = -ik_x, k_y^{(4)} = ik_x, \text{ con } U = 0, \Phi = 1,$$

donde

$$k_x = \omega \left(\frac{c'_{44}}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta, \quad K_y = \omega \left(\frac{c_{44}}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta, \quad (5)$$

$$c'_{44} = \left(c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} \right)$$

Por lo tanto, se puede buscar la solución general del sistema de ecuaciones (1) como la suma de todas las soluciones particulares para U y Φ con los factores de peso ($b_i, b_r, b_s, b_{s'}$) para la n -ésima lámina según,

$$\begin{pmatrix} u_z \\ \phi \\ \sigma_{32} \\ D_y \end{pmatrix}^{(n)} = b_i^{(n)} \begin{pmatrix} 1 \\ e_{15} / \epsilon_{11} \\ ic'_{44} K_y^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}^{(n)} e^{ik_y^{(n)}(y+(n-1)d)} e^{i(k_x x - \omega t)} +$$

$$b_r^{(n)} \begin{pmatrix} 1 \\ e_{15} / \epsilon_{11} \\ -ic'_{44} K_y^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}^{(n)} e^{-ik_y^{(n)}(y+(n-1)d)} e^{i(k_x x - \omega t)} +$$

$$b_s^{(n)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -e_{15} k_x \\ \epsilon_{11} k_x \end{pmatrix}^{(n)} e^{-k_x(y+(n-1)d)} e^{i(k_x x - \omega t)} +$$

$$b_{s'}^{(n)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e_{15} k_x \\ -\epsilon_{11} k_x \end{pmatrix}^{(n)} e^{k_x(y+(n-1)d)} e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (6)$$

Los subíndices i, r, s y s' representan las amplitudes parciales de las ondas incidente, reflejadas y dos ondas en la interfase, respectivamente. Los factores de peso son determinados por las condiciones de contorno en las intercaras de las láminas, las cuales se pueden expresar para la intercara entre las láminas $(n-1)$ y (n) mediante las igualdades:

$$\begin{pmatrix} u_z \\ \phi \\ \sigma_{32} \\ D_y \end{pmatrix}_{y=-(n-1)d}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} u_z \\ \phi \\ \sigma_{32} \\ D_y \end{pmatrix}_{y=-(n-1)d}^{(n)} \quad (7)$$

Utilizando las expresiones (6) y (7) podemos relacionar las amplitudes parciales

$$\mathbf{b}^{(n-1)} = \left(b_i^{(n-1)} b_r^{(n-1)} b_s^{(n-1)} b_s'^{(n-1)} \right)^T$$

con

$$\mathbf{b}^{(n)} = \left(b_i^{(n)} b_r^{(n)} b_s^{(n)} b_s'^{(n)} \right)^T$$

mediante la igualdad matricial

$$\mathbf{b}^{(n-1)} = \mathbf{W} \mathbf{b}^{(n)} \quad (8)$$

Aquí la matriz \mathbf{W} es de dimensión 4×4 y transfiere las amplitudes parciales de las láminas $(n-1)$ y (n) , la cual tiene la forma

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} q_1^{(n)} e^{-iK_y(n-1)d} & q_2^{(n)} e^{-iK_y(n-1)d} & q_3^{(n)} e^{-iK_y(n-1)d} & -q_3^{(n)} e^{-iK_y(n-1)d} \\ q_2^{(n)} e^{iK_y(n-1)d} & q_1^{(n)} e^{iK_y(n-1)d} & -q_3^{(n)} e^{iK_y(n-1)d} & q_3^{(n)} e^{iK_y(n-1)d} \\ q_4^{(n)} e^{kxd} & q_4^{(n)} e^{kxd} & q_5^{(n)} e^{kxd} & q_6^{(n)} e^{kxd} \\ q_4^{(n)} e^{-kxd} & q_4^{(n)} e^{-kxd} & q_5^{(n)} e^{-kxd} & q_6^{(n)} e^{-kxd} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q_1^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{K_y^{(n)} c_{44}^{(n)}}{K_y^{(n-1)} c_{44}^{(n-1)}} + 1 \right), & q_2^{(n)} &= 1 - q_1^{(n)}, \\ q_4^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e_{15}^{(n)} \varepsilon_{11}^{(n-1)} - e_{15}^{(n-1)} \varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)} \varepsilon_{11}^{(n-1)}} \right), & q_5^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n-1)}} + 1 \right), \\ q_3^{(n)} &= \frac{ik_x \varepsilon_{11}^{(n)}}{K_y^{(n-1)} c_{44}^{(n-1)}} q_4^{(n)}, & q_6^{(n)} &= 1 - q_5^{(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Las amplitudes parciales de los campos de ondas de entrada y salida de la superred están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} b_i \\ b_r \\ 0 \\ b_s' \end{pmatrix}^{(en)} = \Gamma_N \begin{pmatrix} b_t \\ 0 \\ b_s \\ 0 \end{pmatrix}^{(sa)}, \quad (11)$$

donde, $b_i^{(en)}$, $b_r^{(en)}$ son las amplitudes de las ondas transversales incidentes y reflejadas en la cara de entrada de la superred; $b_t^{(sa)}$ es la amplitud de la onda transversal transmitida de la superred; $b_s^{(en)}$ y $b_s'^{(sa)}$ son las amplitudes de las ondas evanescentes interfaciales en la entrada y salida de la superred,

las cuales decrecen fuera de las intercaras de entrada y salida, respectivamente.

La matriz de transferencia del sistema completo Γ_N está dada por:

$$\Gamma_N = \prod_{n=1}^N M_n; \quad (12)$$

Normalizando con respecto a la amplitud de la onda incidente, obtenemos el coeficiente de reflexión $R = b_r^{(en)}/b_i^{(en)}$ y transmisión $T = b_t^{(sa)}/b_i^{(en)}$ en función de los términos de la matriz de transferencia.

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Gamma_{21}\Gamma_{33} - \Gamma_{31}\Gamma_{23}}{\Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}\Gamma_{31}} \\ T &= \frac{\Gamma_{33}}{\Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}\Gamma_{31}} \end{aligned} \quad (13)$$

Superredes de Fibonacci

Las superredes de Fibonacci consisten en una secuencia de capas de materiales creadas a partir de dos sistemas generadores A y B, mediante la yuxtaposición de nuevas capas según la siguiente

ley de recurrencia

$$S_j = S_{j-1} S_{j-2}, \quad j \geq 1$$

con las condiciones iniciales $S_{-1} = B$, $S_0 = A$. El número total de elementos $F_j(A)$ y $F_j(B)$ contenidos en la secuencia S_j satisface la sucesión recurrente de Fibonacci

$$F_j = F_{j-1} + F_{j-2}, \quad j \geq 1$$

en la cual $F_{-1} = F_0 = 1$. El número de elementos A y B contenidos en la secuencia S_j es F_{j-1} y F_{j-2} , respectivamente.

En la Tabla I se representan los sistemas de las primeras generaciones

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Analicemos las superredes de Fibonacci utilizando materiales piezoeléctricos de simetría hexagonal (6 mm). Estudiaremos dos tipos de superredes de Fibonacci. En el primer caso (caso I) escogemos las capas tipo-A y tipo-B del mismo material piezoeléctrico (PZT-5A), con la diferencia que una respecto de la otra está polarizada a 180° . Esto significa que las constantes elástica y dieléctrica (c_{44} y ε_{11}) son iguales para todas las capas y la constante piezoeléctrica de la capa tipo-A es $(-e_{15})$ y la capa tipo-B es (e_{15}) .

Tabla I. Primeras generaciones de Fibonacci.

Sistema	A	B	
S₁	AB	1	1
S₂	ABA	2	1
S₃	ABAAB	3	2
S₄	ABAABABA	5	3
S₅	ABAABABAABAAB	8	5
S₆	ABAABABAABAABAABAABA	13	8
S_j	S_{j-1} S_{j-2}	F_{j-1}	F_{j-2}

En el segundo ejemplo (caso II) escogemos la capa tipo-A de material piezoeléctrico PZT5A y la capa tipo-B de material piezoeléctrico PZT4.

Las propiedades físicas de los materiales piezoeléctricos utilizados son dadas en la Tabla II.

Tabla II. Propiedades de los materiales.

Material	C_{44} (N/m ²)	e_{15} (C/m ²)	ϵ_{11}/ϵ_0	ρ (Kg/m ³)
PZT5A	2.11×10^{10}	12.3	916	7.75×10^3
PZT4	2.56×10^{10}	12.7	650	7.5×10^3

En las superredes de Fibonacci estudiadas, el ancho de cada capa es igual a un milímetro y el ángulo de incidencia es igual a 50°.

Caso I

En la Figura 2, mostramos el espectro de reflexión de la onda horizontalmente transversal para algunas capas según la secuencia de Fibonacci (Tabla I). En esta figura graficamos el cuadrado del módulo del coeficiente de reflexión en función de la frecuencia. El espectro de reflexión consiste en una repetición periódica de los principales picos de Bragg y un conjunto de máximos secundarios alternados con mínimos de reflexión. En las primeras secuencias de Fibonacci, es decir para $j = 2$ y $j = 3$ (ver Tabla I), los picos fundamentales de Bragg nunca llegan al valor de máxima reflexión. A partir del número de Fibonacci $j = 4$, los picos fundamentales de Bragg tienen una máxima reflexión. Esto significa que para una onda incidente de 50° aparecen rangos de frecuencias en los cuales la superred no transmite, por consiguiente toda la energía es reflejada. De esta forma, para las superredes estudiadas en este caso, aparecen bandas prohibidas en el espectro. En el diseño y construcción de transductores piezo-compuestos es de gran importancia la existencia de estas bandas prohibidas, en los cuales la frecuencia fundamental de espesor debe estar en el rango de las frecuencias prohibidas para los modos laterales. Esto permite que exista un desacople total entre los modos fundamentales de espesor y los modos laterales.

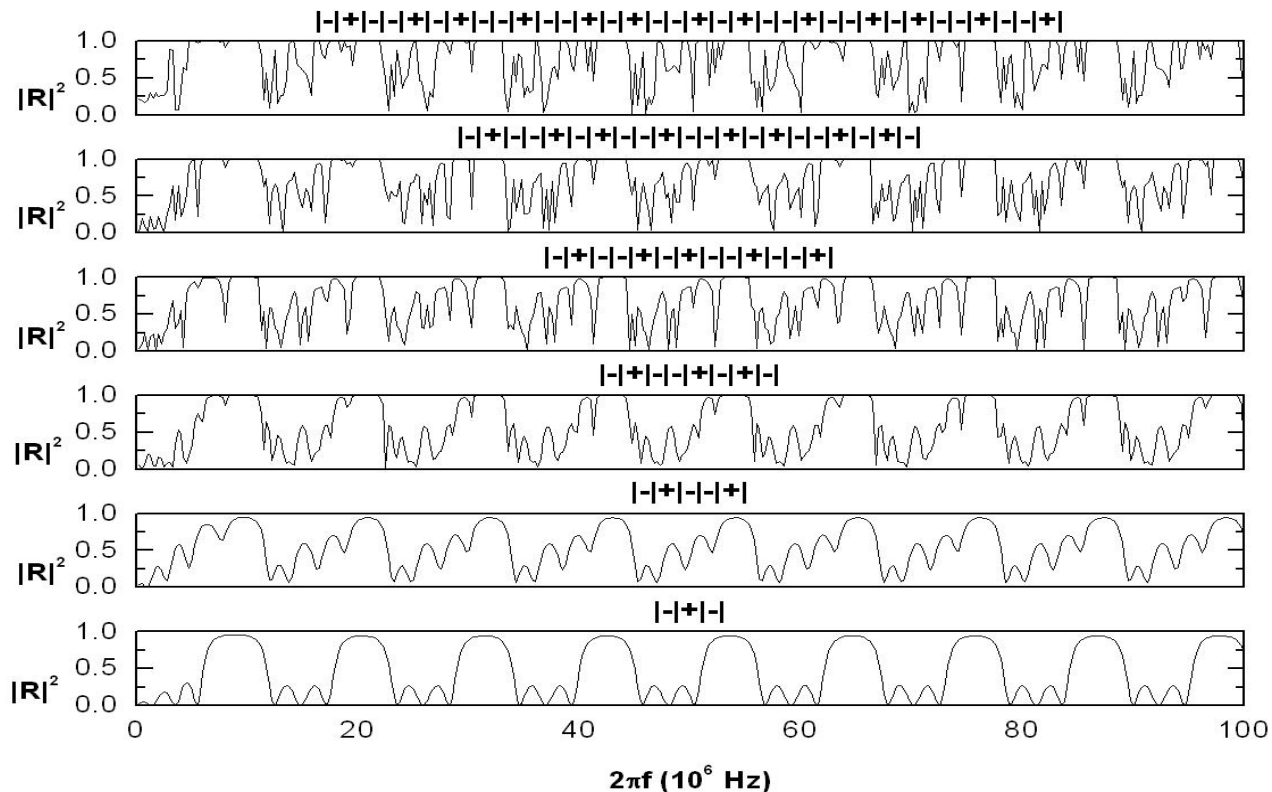


Figura 2. Espectro de reflexión $|R|^2$ para diferentes generaciones de Fibonacci.

