ESTUDIO TEORICO DE TRES SUCESIONES BINARIAS NO FIBONACCI

G Tichadini, Y. Mutomba y R. Pérez-Alvarez
Departmento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Cuba

RESUMEN
Analizamos tres Sucesiones Binarias No-Fibonacci, y estudiamos el carácter del espectro para problemas simples. Se demuestra el carácter Pisot, así como que los espectros de todos estos problemas son singulares continuos.

ABSTRACT
We analize three Binary Non-Fibonaccian Sequences and analyse the character of the spectrum for simple problems. We prove the Pisot character of these sequences. It is shown that the spectra of all these problems are singular continuous.

INTRODUCCION

A partir del descubrimiento de los cuasicristales ha aumentado el interés en sistemas que están a mitad de camino entre los ordenados y los desordenados (vea [1] y las referencias que allí se dan). Entre estos sistemas se destacan las Heteroestructuras Cuasi-regulares (QH: *Quasiregular Heterostructures*) [2,3]. Estas consisten en una sucesión de capas construidas de acuerdo con cierta Regla de Sustitución, de manera que resulta un sistema no periódico pero con un algoritmo preciso de secuenciación de las distintas capas (QS: *Quasiregular Sequences*). La aplicación reiterada de la regla de sustitución a partir de una semilla da las sucesivas generaciones y en el límite el sistema cuasiregular. Por ejemplo, sea la regla de sustitución de Fibonacci

$$\xi_{FIBO}(A) = AB$$
$$\xi_{FIBO}(B) = A$$

Si la semilla es una capa de material A la aplicación sucesiva de esta regla nos lleva a los sistemas

$$A_1 = A,$$
$$A_2 = AB,$$
$$A_3 = ABA,$$
$$A_4 = ABAAB,$$
$$A_5 = ABAABABA,$$

etc.

La QH de Fibonacci sería

$$A_\infty = ABAABABA...$$

Si nos abstraemos del carácter físico de los símbolos y analizamos la sucesión de letras A y B tenemos la Sucesión Cuasiregular (QS) de Fibonacci.

Con un alfabeto de dos letras se pueden formar un sinnúmero de QS. En [4] se pueden ver las definiciones más útiles para la caracterización de estas sucesiones y sus correspondientes heteroestructuras. Entre estas definiciones se destacan las de a) alfabeto, b) cardinal del alfabeto, c) generación o cadena canónica de orden n, d) letra generadora, e) QS primitiva, e) QS de Pisot, f) Matriz Característica de la QS, etc. Más recientemente [5] hemos introducido el concepto de índice de inflación de una letra, índice de inflación de una regla e índice de inflación de la QS. Por brevedad no repetiremos aquí estas definiciones.

Además de la QS de Fibonacci (con índice de inflación 3), otras QS binarias, o sea, creadas con alfabetos de dos letras, han sido también muy estudiadas. Así tenemos las QSs de Thue-Morse (con índice de inflación 4), Period Doubling (con índice de inflación 4), y la llamada Binary Non-Pisot (con índice de inflación 5). También han sido estudiadas, pero con menos detalles, la Fibonacci Generalizada, Thue-Morse Generalizada, etc. Un análisis sencillo indica que sólo hay 4 posibilidades de QSs binarias con índice de inflación 2. Con índice de inflación 3 hay 16 QSs. Existen 48 con índice de inflación igual a 4. Las de índice de inflación 2 no tienen ningún interés pues tres de ellas coinciden con los respectivos masivos mientras que la cuarta no tiene punto fijo, o sea, que la aplicación sucesiva de la regla oscila y no conduce a una estructura determinada. Si nos centramos en las de índice de inflación igual a 3 veremos muchas sin interés por razones análogas. Otras han sido ya estudiadas como las mencionadas más arriba. Con índice de inflación 4 pasa algo semejante, pero aquí encontramos tres que no han sido estudiadas con detalle, a saber:

$$\xi_1(A) = B$$
$$\xi_1(B) = ABB$$

$$\xi_2(A) = B$$
$$\xi_2(B) = BAB$$

$$\xi_3(A) = B$$
$$\xi_3(B) = BBA$$

Las QSs 1 y 3 fueron definidas en trabajos anteriores pero no han sido estudiadas a profundidad (ver [2] y las referencias que allí se dan). La QS 2 hasta donde conocemos, no ha sido estudiada.

Se están investigando con bastante énfasis los posibles usos de las QHs en dispositivos [3]. Una de las propiedades más cautivantes de estos sistemas es que muchas excitaciones elementales tienen espectro singular continuo. Bajo condiciones bastante generales esta propiedad se ha demostrado en varias de estas QSs; la demostración no es válida para la Rudin Shapiro [2].

El objetivo entonces del presente trabajo es caracterizar estas tres Sucesiones Cuasiregulares Binarias hasta el punto de predecir el carácter del espectro de excitaciones elementales simples, como son el espectro electrónico en aproximación de masa efectiva o las oscilaciones elásticas.

A continuación presentaremos tres secciones dedicadas a estas tres QS. Después formularemos algunas conclusiones.

La QS $\xi_1(A) = B$; $\xi_1(B) = ABB$

Esta QS no tiene letra generadora. Sin embargo no es difícil ver que tiene punto fijo. Sus primeras cadenas canónicas son

$$A_1 = A,$$
$$A_2 = B,$$
$$A_3 = ABB,$$
$$A_4 = BABBABB,$$
$$A_5 = ABBBABBABBBABBABB$$

etc.

Al tener índice de inflación 4 el número de letras crece bastante rápido de una generación a otra.

Es evidente también que esta QS es primitiva y que su Matriz Característica es

0	1
1	2

cuyos autovalores son

$$\lambda_1 = \quad 2,4142...$$
$$\lambda_1 = \; - 0,4142...$$

λ_1 es real y mayor que la unidad, y λ_2 es de módulo menor que uno. Por lo tanto, la matriz y la QS son de Pisot.

Una consecuencia inmediata de la propiedad Pisot es que esta QS puede obtenerse por el método de corte y proyección (*cut and project*) [6,7].

La regla en cuestión induce la siguiente relación de recurrencia entre las cadenas canónicas:

$$A_n = B_{n-1}$$
$$B_n = A_{n-1}\, B_{n-1}\, B_{n-1}$$

Ahora pensemos en un problema simple cualquiera estudiado por matrices de transferencia de orden 2 y de módulo unidad. Llamemos de la forma siguiente a las trazas de ciertas matrices representativas de las distintas generaciones:

$$x_n = Tr[A_n]$$
$$y_n = Tr[B_n]$$
$$z_n = Tr[A_n\, B_n]$$

Así las cosas, las relaciones de recurrencia entre las matrices representativas de las cadenas canónicas induce la siguiente relación o mapa de trazas de esta QS:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= y_n z_n - x_n \\ z_{n+1} &= Tr[A_{n+1}B_{n+1}] \\ &= Tr[B_n\, A_n B_n^2] \\ &= Tr[B_n^2\, B_n A_n] \\ &= Tr[B_n]\, Tr[B_n\, B_n A_n] - Tr[B_n A_n] \\ &= y_n(y_n z_n - x_n) - z_n \end{aligned}$$

De este mapa de trazas se deriva directamente el mapa de trazas reducido

x -> y
y -> yz
z -> yyz

y la correspondiente sustitución auxiliar ϕ sobre C = {y,z} semiprimitiva.

La aplicación del Teorema de Bovier-Ghez [8] conduce sin más a que esta QS tiene espectro singular continuo y está soportado en un conjunto de medida de Lebesgue nula. Solamente habría que hacer la misma salvedad que hacen Bovier y Ghez respecto de la Sucesión Circular: al no tener letra generadora la aplicación del teorema se salva al notar que la QS tiene un ciclo de longitud 2.

La QS $\xi_2(A) = B; \xi_2(B) = BAB$

B es letra generadora. A no lo es. Como la aplicación de la regla hace que la longitud de las sucesivas generaciones crezca sin límites, la QS tiene punto fijo. Las primeras cadenas canónicas son:

A_1=A,

A_2 = B,

A_3 = BAB,

A_4 = BABBBAB,

A_5 = BABBBABBABBABBBAB

etc.

La matriz característica es la misma que para la primera sucesión bajo estudio por lo que ésta también es Pisot, con todo lo que ello implica.

El mapa de trazas es

$$x_{n+1} = y_n$$
$$y_{n+1} = y_n z_n - x_n$$
$$z_{n+1} = y_n(y_n z_n - x_n) - z_n$$

o sea, el mismo de la QS ξ_1. El resto del análisis es similar al hecho en el caso anterior. Esta QS resulta cumplir las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez. Como tiene letra generadora no hay que hacer la salvedad que hicimos en el caso anterior.

La QS $\xi_3(A) = B; \xi_3(B) = BBA$

B es letra generadora. A no lo es. La sucesión tiene punto fijo. Veamos las primeras cadenas canónicas:

A_1 = A,

A_2 = B,

A_3 = BBA,

A_4 = BBABBAB,

A_5 = BBABBABBBABBABBBA

etc.

La matriz característica es la misma que para la dos primeras sucesiones bajo estudio por lo que ésta también es Pisot, con todo lo que ello implica.

El mapa de trazas también es el mismo, así como los detalles de la aplicación del Teorema de Bovier-Ghez.

CONCLUSIONES

Hemos demostrado que las tres QSs estudiadas son de Pisot y satisfacen las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez con lo cual las excitaciones elementales simples tendrán espectro singular continuo soportado en un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Las tres QS tienen la misma matriz característica. Esto no es de sorprender pues ésta sólo viene dada por la cantidad de letras de cada tipo en cada regla. Ya menos esperado es el hecho de que las tres tienen el mismo mapa de trazas. Esto se explica por las reglas tan simples y las propiedades de la traza del producto de matrices.

Estos resultados completan el estudio de las QSs de índice de inflación 4.

Como es conocido, existen QSs que no satisfacen las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez. Probablemente el ejemplo más conocido es el de la QS de Rudin-Shapiro. Según los resultados que han sido presentados en este trabajo, para tener tal situación hay que ir a QSs binarias con índice de inflación mayor de 4 y/o a QSs con alfabetos más numerosos. Este trabajo continua con el análisis de tales variantes. Ver por ejemplo, el trabajo que será próximamente publicado al respecto [9].

REFERENCIAS

[1] INTERNATIONAL WORKSHOP ON APERIODIC CRYSTALS (1986): March 11-20, Les Houches, France. Edited by D Gratias and L Michel. **Journal de Physique**, Tome 47, Colloque C3, supplément au No 7 (Juillet 1986).

[2] PEREZ-ALVAREZ, R. and F. GARCIA-MOLINER : (2001) : “Quasiregular Heterostructures”, capítulo invitado en “Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics”, Nova Science Publishers, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-Sager.

[3] MACIA, E. and F. DOMINGUEZ-ADAME (2000): “Electrons, phonons and excitons in low dimensional aperiodic systems”, Madrid, Editorial Complutense (2000).

[4] KOLAR, M.; B. IOCHUM and L. RAYMOND (1993): “Structure factor of 1D systems (superlattices) based on two-letter substitution rules. I. δ (Bragg) peaks”, **J. Phys. A: Math. Gen**. 26:24, 7343-7366.

[5] TICHADINI, G. (2002): "Contribution to the study of Complete Transmittance and Spectrum of quasiregular heterostructures", Tesis de Master en Ciencias Físicas, Universidad de La Habana.

[6] BOMBIERI, E. and J.E. TAYLOR (1986): "Which distributions of matter diffract? An initial investigation", **J. de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au n° 7, C3-19-c3-28.

[7] ______________________________ (1987): "Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory; some preliminary connections", **Contemporary Mathematics** 64, 241-264.

[8] BOVIER, A. and J.M. GHEZ (1993): **Commun. Math. Phys**. 58, 1(45).

[9] ________________________ (1995): **J. Phys. A:Math. Gen**. 28, 2313.

[10] BETANCOURT-RIERA, R. and R. PEREZ-ALVAREZ (en proceso de publicación).