# RELACIONES DE DISPERSIÓN EN FLUIDOS ROTATORIOS COMPRESIBLES

José Marín Antuña, Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Cuba

**RESUMEN**

En este trabajo se obtienen las relaciones de dispersión de ondas planas armónicas bidimensionales en fluidos rotatorios compresibles y se analizan los diferentes casos relacionados con el ángulo entre el vector de onda y el eje de rotación del fluido. Se obtiene la expresión de la velocidad de grupo de las ondas y se busca la solución de las oscilaciones de una pared inclinada sumergida en el fluido.

**ABSTRACT**

In this paper dispersion relations are obtained for two-dimensional harmonic plane waves in a rotating compressible fluid. The different cases are analyzed in dependence of the angle between the wave vector and the rotation axis of the fluid. An expression for the group velocity of the waves is obtained and the solution of the oscillations of an oblique wall immersed in the fluid is founded.

## 1. INTRODUCCIÓN

En trabajos anteriores [1]-[2] fue obtenida una ecuación diferencial de cuarto orden para la descripción de los procesos físicos bidimensionales en fluidos rotatorios compresibles y se obtuvo la posibilidad de excitación y propagación de ondas periódicas armónicas provocadas por oscilaciones de paredes verticales y horizontales sumergidas en el fluido mediante la obtención explícita de las soluciones analíticas de los problemas de frontera correspondientes.

En el presente trabajo se obtiene una relación de dispersión para las ondas planas en el fluido rotatorio compresible, se discuten los resultados obtenidos y la relación entre la velocidad de grupo de las ondas y el vector de onda. Se da, además, una solución para el problema de las oscilaciones de una pared inclinada sumergida en el fluido.

## 2. DESARROLLO

1. Consideremos un fluido rotatorio compresible que ocupa todo el espacio. La ecuación que describe las oscilaciones pequeñas bidimensionales en este fluido es [1]:

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \omega^2 u\right] - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

donde $\nabla_2^2$ es el laplaciano en las coordenadas (x, z), $\omega$ es el duplo de la velocidad angular de rotación del fluido que gira alrededor del eje Oz y u(x, z, t) por su sentido físico es la presión dinámica del fluido, o cada una de las componentes $v_x$, $v_y$, $v_z$ del vector de velocidades de las partículas del fluido. En la obtención de (1) fue considerado que $\partial u/\partial y \equiv 0$, es decir, que los procesos son simétricos en el eje Oy. Para simplificar las notaciones hemos considerado la velocidad del sonido en el fluido c = 1.

Propongamos a la ecuación (1) una solución del tipo

$$u = u_0\, e^{i(\vec{k}\vec{x}+\gamma t)} \qquad (2)$$

donde $\vec{k} = (k_1, k_3)$ es el vector de onda, $\vec{x} = (x, z)$ y $\gamma$ es la frecuencia de la onda. Sustituyendo (2) en (1), obtenemos:

$$\gamma^2(\gamma^2 - \omega^2) - \cos \gamma^2 k^2 + \omega^2 k^2 \cos\theta = 0 \qquad (3)$$

donde $\theta$ es el ángulo que forma el vector de onda $\vec{k}$ con el eje Oz, o sea, con la dirección del vector de velocidad angular del fluido. La expresión (3) es la relación de dispersión de las ondas planas en el fluido rotatorio compresible. De (3) se obtiene

$$k = |\gamma| \sqrt{\frac{\omega^2 - \gamma^2}{\omega^2 \cos^2\theta - \gamma^2}} \qquad (4)$$

La relación de dispersión (4) nos permite concluir la diferencia sustancial que existe entre la propagación de ondas planas armónicas en un fluido rotatorio y la propagación de dichas ondas en un fluido en reposo. Para $\omega \to 0$ de (4) se obtiene la recta $k = |\gamma|$; es decir, la relación conocida de las ondas planas. Además, se observa que, en dependencia del valor del ángulo $\theta$ (o sea, de la dirección del vector de onda $\vec{k}$), el cuadro cambia cualitativamente.

**E-mail**: [1]marin@ff.oc.uh.cu

Efectivamente, en el caso en que el vector de onda $\vec{k}$ sea paralelo al eje de rotación del fluido, la relación de dispersión (4) se transforma en la expresión $k = |\gamma|$, lo que significa que en la dirección del eje Oz se propagan ondas planas armónicas con cualquier frecuencia $\gamma$, incluyendo la onda tipo escalón ($\gamma = 0$). Para las ondas planas armónicas con vector de onda $\vec{k}$ inclinado ($0 < \theta < \pi/2$) se obtiene que no para todo valor de $\gamma$ pueden propagarse las ondas. Efectivamente, existe una zona prohibida para la frecuencia $\gamma$: $\omega \cos\theta < \gamma < \omega$.

Por último, en el caso en que el vector $\vec{k}$ sea perpendicular al eje de rotación del fluido ($\theta = \pi/2$), la relación (4) sólo tiene sentido real cuando $\gamma > \omega$. Esto significa que en ese caso se propagarán solamente aquellas ondas cuya frecuencia $\gamma$ sea mayor que el duplo de la velocidad angular $\omega$.

2. Calculemos la velocidad de grupo de estas ondas. Después de derivar (3) se obtiene para la velocidad de grupo la expresión

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2 - \omega^2 - k^2}\left\{k_1, \frac{\gamma^2 - \omega^2}{\gamma^2} k_3\right\} \qquad (5)$$

De la expresión (5) para la velocidad de grupo pueden sacarse las siguientes conclusiones. En primer lugar, para el fluido en reposo ($\omega = 0$) y teniendo en cuenta que en este caso $k^2 = \gamma^2$, de (5) obtenemos

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\gamma}\vec{k} \equiv \vec{v}_f \qquad (6)$$

Es decir, la velocidad de grupo coincide con la velocidad de fase; no hay dispersión y la energía de las ondas se propaga en la dirección del vector $\vec{k}$.

En segundo lugar, en general para $\omega > 0$ la dirección de $\vec{v}_g$, es decir, la dirección de propagación de la energía de las ondas, no coincide con la dirección del vector de onda $\vec{k}$ y tiene lugar la dispersión de las ondas.

En el caso en que la dirección del vector $\vec{k}$ coincida con el eje de rotación Oz, es decir, para $\theta = 0$, como $k_1 = 0$, $k_3 = k$, $k = |\gamma|$, para la velocidad de grupo tendremos

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2 - \omega^2 - \gamma^2}\left\{0, \frac{\gamma^2 - \omega^2}{\gamma^2} k\right\} \equiv \frac{1}{\gamma}\vec{k} \equiv \vec{v}_f \qquad (7)$$

Es decir, de nuevo las ondas se propagan sin dispersión.

Si $\theta = \pi/2$, bajo la condición $\gamma > \omega$ de propagación de las ondas y, en virtud de que de (4) en este caso $k = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, tendremos para el vector de la velocidad de grupo:

$$\vec{v}_g = \frac{\gamma}{2\gamma^2 - \omega^2 - \gamma^2 + \omega^2}\{k, 0\} \equiv \frac{1}{\gamma}\vec{k} \equiv \vec{v}_f \qquad (8)$$

Es decir, nuevamente una propagación sin dispersión de las ondas.

Los resultados aquí obtenidos coinciden con los de los trabajos [1], [2] mencionados anteriormente en los que aparecen calculadas las expresiones analíticas de las soluciones de los problemas sobre la excitación de ondas planas por paredes oscilantes sumergidas en el fluido, colocadas respectivamente en posición horizontal y vertical.

3. Intentemos hallar una expresión analítica del problema de la excitación de ondas planas armónicas por una pared oscilante inclinada respecto al eje de rotación del fluido, sumergida en el fluido rotatorio compresible.

Supongamos que en el fluido rotatorio compresible se encuentra una pared $\Gamma$ que oscila por la ley $\theta(t)$ $\sin \gamma t$ y que rota junto con el fluido, donde $\varphi$ es el ángulo de inclinación de la pared $\Gamma$ con el eje de rotación del fluido. Entonces, el problema físico-matemático sobre la emisión de ondas provocadas por las oscilaciones de la pared $\Gamma$ será:

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \omega^2 u\right] - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t \le 0} = 0 \;\; \forall k = 0, 1, 2, 3 \qquad (9)$$

$$u(x,z,t)\,|_{(x,z)\in\Gamma} = \theta(t) \sin \gamma t$$

donde u tiene el sentido físico de la componente de la velocidad de las partículas del fluido perpendicular a la pared $\Gamma$. Introduzcamos un sistema nuevo de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Entonces, en las nuevas coordenadas y en virtud de la invarianza del laplaciano, el problema (9) adopta la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla_2^2 u + \omega^2 u\right] - \omega^2 \sin^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \;\; \forall \xi > 0,\; t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t\leq 0} = 0 \ \forall k = 0, 1, 2, 3 \qquad (11)$$

$$u(\xi,\eta,t)\ |_{\xi=0} = \theta(t) \sin \gamma t$$

donde, ahora, $\nabla_2^2 u \equiv u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$. Consideraciones físicas nos permiten afirmar que la solución u no depende de $\eta$. Por ello, la ecuación en (11) adopta la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \omega^2 u\right] - \omega^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \qquad (12)$$

donde $\theta$ es el ángulo entre la dirección del vector de onda $\vec{k}$ y el eje Oz. Apliquemos a (12) la transformada de Laplace; como resultado obtenemos:

$$p^2(p^2 + \omega^2)U - (p^2 + \omega^2 \cos^2 \theta)U_{\xi\xi} = 0 \qquad (13)$$

de donde, para la función $U(\xi,p)$, transformada de Laplace de $u(\xi,t)$, obtenemos el problema de Cauchy

$$U_{\xi\xi} - \frac{p^2(p^2+\omega^2)}{p^2+\omega^2\cos^2\theta} U = 0 \qquad (14)$$

$$U(\xi,0) = \frac{\gamma}{p^2+\gamma^2}$$

La solución acotada del problema (14) tiene la forma

$$U(\xi,p) = \frac{\gamma}{p^2+\gamma^2} e^{-\xi p\sqrt{\frac{p^2+\omega^2}{p^2+\omega^2\cos^2\theta}}} \qquad (15)$$

Sobre la base de las relaciones de dispersión obtenidas en el punto 1 del presente trabajo, la solución del problema (11) deberá tener la forma

$$u(\xi,t) = \sin\gamma t\, e^{i\gamma\sqrt{\frac{\omega^2-\gamma^2}{\omega^2\cos^2\theta-\gamma^2}}\xi} \qquad (16)$$

la que para $\gamma < \omega\cos\theta$ y $\gamma > \omega$ tiene carácter oscilante y para $\omega\cos\theta < \gamma < \omega$ tiene carácter amortiguado. O sea, que en el primer caso las ondas se propagan y en el segundo no. Como puede apreciarse, de (16), para $\theta = 0$ y para $\theta = \pi/2$ se obtienen los resultados de [2] para las paredes oscilantes sumergidas horizontal y verticalmente en el fluido.

## 3. CONCLUSIONES

Los resultados arriba expuestos tienen interés para el ulterior desarrollo de la teoría de la excitación y propagación de ondas bidimensionales en fluidos rotatorios compresibles y están en plena correspondencia con resultados anteriormente obtenidos. Sin embargo, la obtención de una expresión analítica para la solución del problema (11) se dificulta en grado extremo, debido a que la expresión (15) es la transformada de Laplace de un original muy difícil de calcular. La aplicación del método de fase estacionaria expuesto por Copson [3] permitiría obtener la expresión asintótica para $t \to \infty$ del original de la función (15), la cual coincide con (16).

## REFERENCIAS


[1] MARÍN, J. (1984): **Revista Cubana de Física** 4(3), 63.

[2] ________ (1985): **Revista de Ciencias Matemáticas** 4(1), 105.

[3] COPSON, E.T. (1965): **Asymptotic Expansions** (University Press, Cambridge).