

# ESTUDIO TEÓRICO DE VARIAS SUCESIONES CUASIRREGULARES BINARIAS, TERNARIAS Y CUATERNARIAS

R. Betancourt Riera, W. Pardo Tamayo y R. Pérez-Álvarez  
Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Cuba

## RESUMEN

Analizamos varias sucesiones binarias, ternarias y cuaternarias, y estudiamos el carácter del espectro para problemas simples. Se demuestra el carácter Pisot, así como que los espectros de todos estos problemas son singulares continuos. Se reportan resultados numéricos para el caso de electrones en el marco de la Teoría de Masa Efectiva de una de estas sucesiones que resulta tener propiedades similares a la Rudin-Shapiro.

## ABSTRACT

We analyze some binary, ternary and quaternary sequences and analyse the character of the spectrum for simple problems. We prove the Pisot character of these sequences. It is shown that the spectra of all these problems are singular continuous. A numerical test is given for the case of electrons in the framework of the Effective Mass Theory for one of these sequences and it is shown that this sequence is similar to the Rudin-Shapiro one.

## INTRODUCCIÓN

Desde principios de la década de 1970 se estudian con gran interés los sistemas regulares a muchas capas [1-5] (Pozos Cuánticos, Superredes, etc.). En los últimos años se ha consolidado el estudio de las llamadas Heteroestructuras Quasiregulares (QH: *Quasiregular Heterostructures*) [6-12]. Estas consisten en una sucesión de capas construida de acuerdo con cierta regla de sustitución, de manera que resulta un sistema no periódico pero con un algoritmo preciso de secuenciación de las distintas capas (QS: *Quasiregular Sequences*). Entre las QSs más estudiadas están las de Fibonacci, Thue Morse, Circular, Rudin-Shapiro, etc. La de Fibonacci, por ejemplo, se forma según la regla de sustitución

$$\begin{aligned} x_{\text{FIBO}}(\text{A}) &= \text{AB} \\ x_{\text{FIBO}}(\text{B}) &= \text{A} \end{aligned} \quad (1)$$

Una de las propiedades más interesantes de estas estructuras es que muchas excitaciones elementales poseen espectro singular continuo, a diferencia, por ejemplo, de los pozos cuánticos en que típicamente es discreto, más eventualmente un continuo, y de las superredes donde es a intervalos o bandas. Bajo condiciones bastante generales esta propiedad se ha demostrado en varias de estas QSs gracias a un Teorema debido a A Bovier y JM Ghez; la Rudin Shapiro no cumple las hipótesis del teorema de Bovier-Ghez [6, 11, 12].

Para estudiar estos sistemas se han introducido los conceptos de Alfabeto, Matriz Característica, Razón Áurea, y otros, que damos por conocidos y que se pueden ver en las referencias citadas, particularmente en [6, 11-15].

Con la vista fija en la posibilidad de obtener nuevas propiedades, en el presente trabajo analizamos varias QS binarias, ternarias y cuaternarias. La elección específica se debe a que no han sido estudiadas hasta el momento. Estudiamos su carácter Pisot. Seguidamente argumentamos teóricamente el hecho de que los espectros de problemas simples sobre tales estructuras son singulares continuos. Por último formulamos algunas conclusiones. Mención especial merece una de ellas, que llamaremos RBR, y que no satisface las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez [11,12] pero que sin embargo tiene espectro singular continuo. Reportamos entonces resultados numéricos para espectros de electrones de conducción que ratifican esta conclusión.

## QS Binarias

Las sucesiones que nos interesan se definen por las siguientes reglas de sustitución:

$$x_1(\text{A}) = \text{ABA} \quad (2)$$

$$x_1(\text{B}) = \text{A}$$

$$x_2(\text{A}) = \text{AB} \quad (3)$$

$$x_2(\text{B}) = \text{ABA}$$

Ambas tienen por alfabeto a  $\{A, B\}$ . Las matrices características son, respectivamente

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

De aquí es inmediato que las dos sucesiones son primitivas. Además, en el caso de la regla  $x_1$  los autovalores y autovectores son:

$$l_1 = 1 - \sqrt{2}; l_2 = 1 + \sqrt{2} \quad (6)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} q - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} q + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por su parte, para la segunda de las sucesiones estudiadas, o sea  $x_2$ :

$$l_1 = 1 - \sqrt{2}; l_2 = 1 + \sqrt{2} \quad (7)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

En ambos casos el segundo autovalor es la razón áurea y el correspondiente autovector da la relación entre las poblaciones de las letras en la sucesión. Además, este cálculo indica que ambas sucesiones tienen la propiedad Pisot por lo que son derivables por corte y proyección de una red de dimensión superior [9,10].

Introduzcamos las siguientes notaciones para las trazas de las Matrices de Transferencia de las Cadenas Canónicas [6]:

$$x_n = \text{Tr}[A_n]; y_n = \text{Tr}[B_n]; z_n = \text{Tr}[B_n A_n] \quad (8)$$

Entonces la primera de las sucesiones estudiadas ( $x_1$ ) tiene asociado el mapa de trazas

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n z_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \quad (9)$$

$$z_{n+1} = x_n^2 z_n - x_n y_n - z_n$$

mientras que en el segundo caso ( $x_2$ )

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= z_n \\ y_{n+1} &= x_n z_n - y_n \end{aligned} \quad (10)$$

$$z_{n+1} = x_n^2 z_n - y_n z_n - x_n$$

No hace falta aburrir al lector con detalles insustanciales. De estos mapas de trazas se deduce sin mucho esfuerzo que en los dos casos se satisfacen las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez, con lo cual se puede asegurar sin más que las excitaciones elementales definidas sobre estas estructuras tienen espectro singular continuo.

### Una QS Ternaria

Con idénticos objetivos de estudio veamos la siguiente QS ternaria

$$\begin{aligned} x_3(A) &= AB \\ x_3(B) &= C \\ x_3(C) &= CA \end{aligned} \quad (11)$$

cuya matriz característica es

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

El cubo de esta matriz es una matriz positiva. De aquí se desprende que la matriz y la QS son primitivas. Sus autovalores son

$$\begin{aligned} l_1 &= 1,75488 L \\ l_2 &= 0,12 L + i0,74 L \\ l_3 &= 0,12 L - i0,74 L \end{aligned} \quad (13)$$

por lo que esta QS tiene carácter Pisot. El primero de estos autovalores es obviamente la razón áurea. Los autovectores por su parte son:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} 1,32L \\ 0,75L \\ 1 \end{bmatrix} \\ v_2 &= \begin{bmatrix} -0,66 L - i0,56L \\ -0,87 L + i0,74L \\ 1 \end{bmatrix} \\ v_3 &= \begin{bmatrix} -0,66 L + i0,56L \\ -0,87 L - i0,74L \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

De aquí se deduce que en la QS las letras están en la relación 1,32..., 0,75..., 1. Definiendo las trazas como

$$\begin{aligned}
x_n &= \text{Tr}[A_n]; y_n = \text{Tr}[B_n]; z_n = \text{Tr}[C_n] & l_2 &= 1 \\
w_n &= \text{Tr}[B_n]; r_n = \text{Tr}[A_n C_n] & l_3 &= -0,57 L + i0,36 L \\
s_n &= \text{Tr}[B_n C_n]; v_n = \text{Tr}[C_n B_n A_n] & l_4 &= 0,57 L - i0,36 L
\end{aligned} \tag{15}$$

el mapa de trazas queda

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= w_n \\
y_{n+1} &= z_n \\
z_{n+1} &= r_n \\
w_{n+1} &= v_n \\
r_{n+1} &= x_n v_n - s_n \\
s_{n+1} &= z_n r_n - x_n \\
v_{n+1} &= x_n(z_n v_n - w_n) - z_n s_n + y_n
\end{aligned} \tag{16}$$

y de aquí se deduce el carácter singular continuo del espectro de excitaciones elementales.

Otros muchos ejemplos de sucesiones binarias y ternarias siguen este mismo paradigma, o sea son primitivas, tienen carácter Pisot, sus matrices características dan la razón áurea y las proporciones de letras sin mayores dificultades y el análisis de los mapas de trazas da como resultado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez lo que lleva sin más a que el espectro de muchas excitaciones elementales es singular continuo. En [15] hay una veintena de ejemplos de QS binarias y ternarias que agotan las QS de este tipo con índice de inflación pequeño.

### Una QS cuaternaria que no satisface las hipótesis del Teorema de Bovier-Ghez

Estudiemos ahora la siguiente regla

$$\begin{aligned}
x_4(A) &= AC \\
x_4(B) &= DB \\
x_4(C) &= ADB \\
x_4(D) &= AB
\end{aligned} \tag{17}$$

cuya matriz es

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

y que llamaremos RBR por las iniciales de uno de nosotros. Es inmediato que esta QS es primitiva pues  $M^3$  no tiene ceros. Su razón áurea es  $l_1 = 2,1479 L$ . Los restantes autovalores son

por lo que no tiene la propiedad Pisot. El autovector más relevante, o sea el asociado al autovalor de la razón áurea es

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1,46L \\ 1,46L \\ 0,68L \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

de donde se infiere que las letras A, B, C y D están en la relación 1,46..., 1,46..., 0,68..., y 1.

Definamos las trazas

$$\begin{aligned}
x_n &= \text{Tr}[A_n]; y_n = \text{Tr}[B_n]; z_n = \text{Tr}[C_n] \\
w_n &= \text{Tr}[D_n]; r_n = \text{Tr}[A_n B_n] \\
s_n &= \text{Tr}[B_n C_n]; v_n = \text{Tr}[C_n A_n] \\
h_n &= \text{Tr}[B_n D_n]; g_n = \text{Tr}[D_n A_n] \\
q_n &= \text{Tr}[C_n D_n]; l_n = \text{Tr}[C_n B_n D_n] \\
p_n &= \text{Tr}[B_n D_n A_n]; t_n = \text{Tr}[C_n A_n B_n] \\
k_n &= \text{Tr}[A_n B_n D_n C_n]
\end{aligned} \tag{21}$$

El mapa de trazas derivado es

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= v_n \\
y_{n+1} &= h_n \\
z_{n+1} &= p_n \\
w_{n+1} &= r_n \\
r_{n+1} &= k_n \\
s_{n+1} &= h_n p_n - x_n \\
v_{n+1} &= v_n p_n + l_n - z_n h_n \\
h_{n+1} &= h_n r_n + g_n - w_n x_n \\
g_{n+1} &= v_n r_n + s_n - z_n y_n \\
q_{n+1} &= p_n r_n - w_n \\
l_{n+1} &= p_n (h_n r_n + g_n - w_n x_n) - y_n \\
p_{n+1} &= h_n (v_n r_n + s_n - z_n y_n) + v_n g_n + q_n - w_n x_n v_n
\end{aligned}$$

$$t_{n+1} = h_n(v_n p_n + l_n - z_n h_n) - x_n v_n + z_n$$

$$k_{n+1} = (h_n r_n + g_n - w_n x_n)(v_n p_n + l_n - z_n h_n) + x_n(v_n r_n + s_n - z_n y_n) - t_n - r_n(x_n v_n - z_n)$$

La regla de sustitución auxiliar es

$$\begin{aligned} \phi(x) &= v; & \phi(y) &= v; & \phi(z) &= p \\ \phi(w) &= r; & \phi(r) &= k; & \phi(s) &= hp \\ \phi(v) &= vp; & \phi(h) &= hr \\ \phi(g) &= vr; & \phi(q) &= pr \\ \phi(l) &= phr; & \phi(p) &= hvr \\ \phi(t) &= hvp; & \phi(k) &= hrvp \end{aligned} \quad (22)$$

con el alfabeto

$$B = \{x, y, z, w, r, s, v, h, g, l, q, p, t, k\}$$

Las hipótesis del teorema de Bovier-Ghez son tres, a saber:

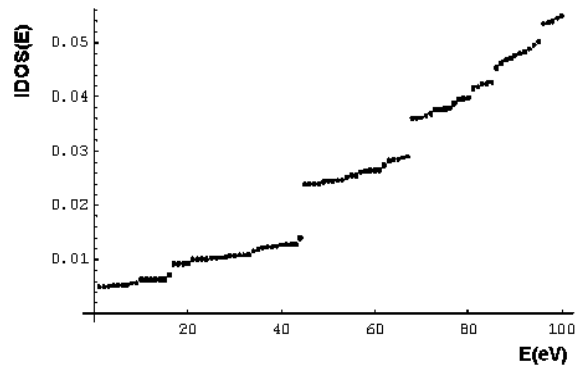
1. Que la QS sea primitiva.
2. Que la Regla de Sustitución Auxiliar  $f$  sea semiprimitiva en algún subconjunto  $C$  del Léxico.
3. Que  $x^k(0)$  para  $k < \infty$  que contenga el cuadrado de alguna letra o palabra  $b \in B$ .

Vemos que de estas tres condiciones sólo se satisface la primera, puesto que nuestra QS es primitiva. La segunda condición es imposible de cumplir ya que  $\phi$  no es semiprimitiva. Si desarrollamos  $\phi$  en cualquier subconjunto  $C \in B$  vemos que aunque existe un  $k$  para el cual  $\phi^k(C_i)$  contiene todas las letras de  $C$  aparecen nuevas letras de  $B$  que no pertenecen a  $C$ . Esto último nos indica que  $\phi$  no será primitiva en  $C$ , ya que el hecho de aparecer una nueva letra cambia su alfabeto y en consecuencia el orden de la matriz característica asociada a  $\phi$  en el subconjunto. Esto último nos demuestra que  $\phi$  no es semiprimitiva y por tanto no se cumplen para esta regla de sustitución las proposiciones 3.1 y 3.2 dadas en [11,12], por lo que podemos concluir que el primer teorema de Bovier-Ghez no se cumple.

El incumplimiento de este teorema no implica que podamos llegar a conclusiones sobre la naturaleza del espectro de la QH. Las condiciones que impone el teorema 1 de Bovier-Ghez son sólo condiciones suficientes para que el espectro sea singular continuo, por lo que se hace necesario otro tipo de análisis para establecer la naturaleza del espectro.

## Espectro de electrones en una QS de tipo RBR

Para discriminar el carácter del espectro de la QS cuaternaria estudiada, hagamos un experimento numérico. Usando el mapa de trazas o la regla de sustitución para las matrices de transferencia es relativamente fácil calcular el espectro [6]. En la Figura adjunta se presenta la IDOS (*Integrated Density of States*) de electrones de conducción para una octava generación de una QS RBR donde las capas A y C están constituidas por el material  $Al_{0,35}Ga_{0,65}As$ , mientras que B y D están formadas por GaAs sin mezclar. A y C tienen tres capas atómicas mientras que B y D tienen seis. Esto hace que las primeras tengan un ancho de 8,4 Å y las segundas 16,8 Å. Los datos de los materiales y demás parámetros del cálculo se pueden ver en [15].



**Figura 1.** Densidad Integrada de Estados (IDOS) de una QS de tipo RBR.

Este espectro tiene aspecto de escalera del Diablo. Para comprobar su fractalidad calculamos su dimensión  $D(q)$  para varios valores representativos del índice  $q$ . En la Tabla adjunta se pueden ver los resultados.

**Tabla 1.** Dimensión fractal  $D(q)$  para algunos valores de  $q$  de una QS de tipo RBR.

$q$	$D(q)$
0.0	0.76
1.0	0.69
2.0	0.60
3.0	0.53

Estos números indican claramente el carácter multifractal de este espectro. En [15] se pueden ver más detalles de los análisis tanto teóricos como numéricos presentados aquí.

## CONCLUSIONES

Hemos analizado varias QS binarias y ternarias relativamente simples. Hemos demostrado que gozan de la propiedad Pisot lo que las hace derivables de una red en una dimensión superior por el método de corte y proyección [6-10]. Reportamos sus mapas de trazas y los principales momentos de

la aplicación del teorema de Bovier-Ghez. De aquí se deriva sin más que el espectro de problemas simples sobre estas QS es singular continuo. Hasta el momento no hay estudios experimentales de estas sucesiones concretas aunque sí en sucesiones muy parecidas [6, 14] cuyo estudio teórico ya ha sido reportado [6, 14, 15].

Este mismo análisis en el ejemplo de la QS que hemos llamado RBR es distinto. Esta QS resulta primitiva, no Pisot, y no satisface las hipótesis del teorema de Bovier-Ghez. No obstante, el cálculo numérico de electrones en Teoría de Masa Efectiva no deja lugar a dudas acerca de la multifractalidad

del espectro. Esto último implica que el espectro no es exactamente autosimilar ya que tiene una distribución no constante de exponentes de escalado.

En [6] se reportan análisis semejantes a los llevados a cabo en el presente trabajo pero aplicados a la sucesión de Rudin-Shapiro. La comparación con los resultados del presente trabajo lleva a que ambas sucesiones tienen las mismas características. Entonces, presumiblemente estas dos QS son ejemplares de toda una clase de QS con propiedades peculiares.

## REFERENCIAS

1. ESAKI, L. (1984): **J. Physique Colloques**, 45, C5-3.
2. BASTARD, G. (1989): "Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures", Éditions de Physique, Paris.
3. VINTER, B. and C. WEISBUCH (1991): "Quantum Semiconductor Structures", Academic Press, San Diego.
4. GARCÍA-MOLINER, F. y otros (1994): "Electrones y Fonones en Pozos Cuánticos", editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, España.
5. GELLER, M.R. (2001): "Quantum phenomena in low-dimensional systems", <http://www.arXiv:cond-mat/0106256>.
6. PÉREZ-ÁLVAREZ, R. and F. GARCÍA-MOLINER (2001): "Quasiregular Heterostructures", capítulo invitado en "Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics", Nova Science Publishers, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-Sager.
7. MACIA, E. and F. DOMÍNGUEZ-ADAME (2000): "Electrons, phonons and excitons in low dimensional aperiodic systems", Madrid, Editorial Complutense.
8. International Workshop on Aperiodic Crystals, March 11-20, (1986): Les Houches, France. Edited by D Gratias and L Michel. **Journal de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au No 7 (Juillet 1986).
9. BOMBIERI, E. and J.E. TAYLOR (1986): "Which distributions of matter diffract? An initial investigation", **J. de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au n° 7, C3-19-c3-28.
10. \_\_\_\_\_ (1987): "Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory; some preliminary connections", **Contemporary Mathematics** 64, 241-264.
11. BOVIER, A. and J.M. GHEZ (1993): **Commun. Math. Phys.** 58(1), 45.
12. \_\_\_\_\_ (1995): **J. Phys. A:Math. Gen.** 28, 2313.
13. KOLAR, M. et al. (1993): **J. Phys. A: Math. Gen.** 26, 7343.
14. ZHU, Y-y and N-b Ming (1990): **Phys. Rev. B** 42:6, 3676.
15. BETANCOURT RIERA, R. (2003): Tesis de Maestría, Universidad de La Habana.