MATRIZ CARACTERÍSTICA Y RAZÓN ÁUREA DE SUCESIONES CUASIRREGULARES

R. Pérez-Álvarez, R. Betancourt Riera, y W. Pardo Tamayo
Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Cuba

RESUMEN
De una manera completamente general escribimos la relación de recurrencia entre las poblaciones de letras en dos generaciones sucesivas en términos de la Matriz Característica (CM). En el límite cuando la generación es infinito, obtenemos que la razón áurea es autovalor de la CM; las componentes del autovector correspondiente resultan ser las proporciones en las que se encuentran las diferentes letras en la sucesión.

ABSTRACT
In a general manner we write down the recurrence relation for the population of the different letters in a Quasiregular Sequence in terms of the Characteristic Matrix (CM). In the limit as the generation becomes infinite we obtain that the Golden Ratio is an eigenvalue of the CM. The components of the corresponding eigenvector are the proportions in which the different letters enter in the sequence.

INTRODUCCIÓN

Continuando con el auge de los sistemas a muchas capas [1-5] (Pozos Cuánticos, Superredes, etc.), en los últimos años se ha consolidado el estudio de las llamadas Heteroestructuras quasi-regulares (QH: *Quasiregular Heterostructures*) [6-12]. Estas consisten en una sucesión de capas construida de acuerdo con cierta regla de sustitución, de manera que resulta un sistema no periódico pero con un algoritmo preciso de secuenciación de las distintas capas (QS: *Quasiregular Sequences*). Entre las QSs más estudiadas están las de Fibonacci, Thue Morse, Rudin-Shapiro, etc. La de Fibonacci, por ejemplo, se forma según la regla de sustitución

$$\begin{aligned} \xi_{FIBO}(A) &= AB \\ \xi_{FIBO}(B) &= A \end{aligned} \tag{1}$$

Una de las características más interesantes de estas estructuras es que muchas excitaciones elementales poseen espectro singular continuo, a diferencia, por ejemplo, de los pozos cuánticos en que típicamente es discreto, y de las superredes donde es a bandas. Bajo condiciones bastante generales esta propiedad se ha demostrado en varias de estas QSs aunque la demostración no es válida para la Rudin Shapiro [6, 11, 12].

Entre las magnitudes que han demostrado su utilidad para describir a las QSs están la Matriz Característica, la proporción de letras y la razón áurea.

La Matriz Característica (CM) es aquella matriz que en su fila i y columna j tiene un entero no negativo igual al número de veces que está la letra j-ésima en la regla i-ésima. En casos sencillos este procedimiento puede generar sucesiones periódicas; un ejemplo de esto es

$$\begin{aligned} \xi_{per}(A) &= AB \\ \xi_{per}(B) &= A \end{aligned} \tag{2}$$

con CM

$$M_{per} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Pero también puede generar sucesiones no periódicas. Por ejemplo, para la sucesión de Fibonacci

$$M_{FIBO} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Esta representación matricial sigue la descripción usada en [13]. Otras descripciones también son posibles, destacando entre ellas la proyección desde una estructura periódica de orden superior [14] y las recurrencias progresivas y regresivas [15]. Las generaciones posteriores a la cuarta son diferentes pero el número total de elementos sigue la ley de Fibonacci.

El objetivo del presente trabajo es demostrar que de la CM se puede extraer de manera sencilla la información acerca de la razón áurea y las proporciones en que una letra aparece en la QS.

Relaciones de Recurrencia de la Población de Letras

Llamemos $F_n^{(i)}$ a la cantidad de letras de tipo i que aparecen en la generación n-ésima. Entonces es evidente que entre estas magnitudes existe la siguiente relación de recurrencia

$$F_{n+1}^{(i)} = \sum_j M_{ji} F_n^{(j)} \tag{5}$$

Dividamos ahora ambos miembros por la población de una letra específica arbitrariamente escogida; la k-ésima, por ejemplo. Tendremos entonces

$$\frac{F_{n+1}^{(i)}}{F_n^{(k)}} = \sum_j M_{ji} \frac{F_{n+1}^{(i)}}{F_n^{(k)}} \tag{6}$$

Introduzcamos ahora las magnitudes

$$\tau_n^{(i)} = \frac{F_{n+1}^{(i)}}{F_n^{(i)}}; \qquad f_n^{jk} = \frac{F_n^{(j)}}{F_n^{(k)}} \tag{7}$$

La primera de ellas es la relación entre las poblaciones de la letra i en la generación n y la siguiente. La segunda magnitud introducida es la proporción de cada letra respecto de una de ellas, la k-ésima en este caso, siempre en la generación n. Definamos, además, los límites de estas magnitudes cuando la generación en cuestión se hace muy grande, esto es

$$\tau^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(i)}; \qquad f^{jk} = \lim_{n\to\infty} f_n^{jk} \tag{8}$$

La primera de estas dos es la llamada relación o razón áurea. La segunda es simplemente la relación o proporción entre las letras de una sucesión. Con estas notaciones, la relación de recurrencia entre las poblaciones de letras en dos generaciones sucesivas, cuando $n \to \infty$, se lee

$$\sum_j [M_{ji} - \tau^{(j)}\delta_{ij}]\ f^{jk} = 0 \tag{9}$$

Y aquí se tiene el primer resultado interesante de este análisis: la razón áurea es autovalor de la traspuesta de la CM (o autovalor por la izquierda de la CM). Además, el autovector correspondiente da las poblaciones relativas de las distintas letras.

Es evidente que

$$\tau_n^i = f_{n+1}^{ik} f_n^{ki} \tau_n^k \tag{10}$$

y por lo tanto todas la letras tienen la misma relación o razón áurea en la sucesión, o sea en la generación de índice infinito. Esta reflexión lleva a pensar que no todos los autovalores de la CM tienen interpretación de razón áurea. Esto, por otra parte, es evidente del hecho de que la demostración hecha concluye que la razón áurea es autovalor de la CM, pero no lo contrario, o sea que habrá otros autovalores de la CM que no tengan esta interpretación.

Ejemplos

El caso de Fibonacci es elocuente. Los autovalores de la CM son

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{11}$$

mientras que el autovector que da las proporciones de letras es

$$v_2 = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

El otro autovector tiene componentes 1 y - τ.

Las QS de Thue-Morse, period doubling, circular, binary non-Pisot, ternary non-Pisot, e incluso la más complicada Rudin-Shapiro son ejemplos en que esta manera de calcular las razones áureas y proporciones es mucho más cómoda que la utilizada hasta el momento, consistente en escribir las relaciones de recurrencia y hacer maniobras algebraicas largas y costosas. En estos casos, al igual que en el de Fibonacci, hay un único autovector con todas sus componentes positivas y por lo tanto el único susceptible de ser interpretado como proporción de la presencia de las distintas letras.

Un ejemplo algo más *raro* es la QS

$$\begin{aligned} \xi(A) &= B \\ \xi(B) &= BBB \end{aligned} \tag{13}$$

con CM

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Lo raro está en que la sucesión no tendrá Aes. Los autovalores y autovectores son, respectivamente

$$\begin{gathered} \lambda_1 = 0; \qquad \lambda_2 = \tau = 3 \\ v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{15}$$

Y este resultado confirma que la razón áurea de la letra B es 3, a la A se le puede asignar esta misma razón áurea, y la relación entre las Bes y las Aes es de uno a cero.

Algo más *rara* aún es la QS

$$\begin{aligned} \xi(A) &= A \\ \xi(B) &= ABB \end{aligned} \tag{16}$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

y

$$\lambda_1 = \tau^{(1)} = 1; \qquad \lambda_2 = \tau^{(2)} = 2 \tag{18}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

La interpretación es trivial. Si la semilla es A, o cualquier palabra que sólo contenga Aes, $\tau^{(1)}$ es la razón áurea de todas las letras y el autovector v_1 da la relación entre el número de Aes y el de Bes. Si la semilla tiene sólo Bes, o ambas letras, el segundo autovalor y su correspondiente autovector contienen estas informaciones.

La relación de recurrencia entre dos generaciones sucesivas es la misma cualquiera sea la semilla o palabra inicial; no tenemos que estar hablando necesariamente de una cadena canónica. Esto no implica que cualquiera sea la semilla obtendremos la misma razón áurea, como acabamos de mostrar.

CONCLUSIONES

Hemos demostrado que el proceso de diagonalización de la Matriz Característica permite obtener de una manera simple y expedita la razón áurea de cualquier Sucesión Cuasirregular. Adicionalmente, obtenemos las proporciones en que están presentes las diferentes letras en la Sucesión. Incluso en casos de QSs no primitivas este resultado es correcto; el segundo y tercer ejemplo desarrollados en el presente trabajo dan fe de ello. Esta interpretación de los autovalores y autovectores de la CM, aparentemente anodina, puede tener una importancia capital en aplicaciones pues nos dice la cantidad de cada material que contendrá el sistema y, por lo tanto su costo en materia prima. En los trabajos [16, 17] se pueden ver más casos concretos de lo que aquí hemos demostrado.

REFERENCIAS

1. ESAKI, L. (1984): **J. Physique Coloques**, 45, C5-3.

2. BASTARD, G. (1989): "Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures", Éditions de Physique, Paris.

3. VINTER, B. and C. WEISBUCH (1991): "Quantum Semiconductor Structures", Academic Press, San Diego.

4. GARCÍA-MOLINER, F. y otros (1994): "Electrones y Fonones en Pozos Cuánticos", editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, España.

5. GELLER, M.R. (2001): "Quantum phenomena in low-dimensional systems", http://www.arXiv:cond-mat/0106256.

6. PÉREZ-ÁLVAREZ, R. and F. GARCÍA-MOLINER (2001): "Quasiregular Heterostructures", capítulo invitado en "Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics", Nova Science Publishers, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-Sager.

7. MACIA, E. and F. DOMÍNGUEZ-ADAME (2000): "Electrons, phonons and excitons in low dimensional aperiodic systems", Madrid, Editorial Complutense.

8. International Workshop on Aperiodic Crystals, March 11-20, (1986): Les Houches, France. Edited by D Gratias and L Michel, **Journal de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au No 7 (Juillet).

9. BOMBIERI, E. and J.E. TAYLOR (1986): "Which distributions of matter diffract? An initial investigation", **J. de Physique**, 47, Colloque C3, supplément au n° 7, C3-19-c3-28.

10. ______________________________ (1987): "Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory; some preliminary connections", **Contemporary Mathematics** 64, 241-264.

11. BOVIER, A. and J.M. GHEZ (1993): **Commun. Math. Phys**. 58(1), 45.

12. BOVIER, A. and J.M. GHEZ (1995): **J. Phys. A: Math. Gen**. 28, 2313.

13. LU, J.P. y otros (1986): **Phys. Rev. B** 33, 915.

14. MAC DONALD, A.H. (1987) en Interface, Quantum Wells and Superlattices, ed. por C.R. Leavens y R. Taylor, Plenum, New York.

15. WANG, Y.Y. and J.C. MAAN (1989), **Phys. Rev. B** 40, 1955.

16. KOLAR, M. **et al**. (1993): **J. Phys. A: Math. Gen.** 26, 7343.

17. ZHU, Y-y and N-b Ming (1990): **Phys. Rev. B** 42:6, 3676.