¿CUMPLE LA TEORÍA DE DE BROGLIE-BOHM CON EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA?

Brenda Carballo Pérez[1] y Jesús Rubayo Soneira[2]
Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, Ciudad de La Habana, Cuba

RESUMEN

La teoría de De Broglie-Bohm es una de las teorías de variables ocultas más discutidas en las últimas décadas. Nosotros centramos nuestra atención en la verificación del principio de correspondencia en esta teoría. Probamos que tan importante principio de la física no se cumple trayectoria a trayectoria en su forma fuerte (para todos los tiempos en todos los sistemas macroscópicos), con independencia de la elección de las condiciones iniciales. Además comparamos el promedio de las trayectorias cuánticas con el promedio de las trayectorias clásicas y analizamos los resultados. Simultáneamente, encontramos que un sistema que no tiene caos clásico (dos osciladores armónicos acoplados), tampoco presenta caos, según el análisis de las trayectorias de Bohm.

ABSTRACT

De Broglie-Bohm theory is one of the most discussed theories of hidden variables in the last decades. We mainly focus our attention on the validity of the correspondence principle in this theory. We prove that such an important principle in Physics is not fulfilled trajectory by trajectory in its strong form (for all times in all macroscopic systems), independently of how the initial conditions are chosen. We also compare the average quantum trajectories with the average classical ones and we analyze the results. At the same time, we find out that a system not having classical chaos (two coupled harmonic oscillators) doesn't present chaos, according to the analysis of the Bohm trajectories.

INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica como teoría no determinista en el sentido clásico, ha sido objeto de críticas. Los trabajos de De Broglie en 1926 y luego los de Bohm, a comienzos de la década del 50 del pasado siglo [1, 2, 3], dieron origen a la teoría de variables ocultas que hoy conocemos como la teoría de De Broglie-Bohm. Actualmente grupos de destacados científicos se encuentran aplicándola a sistemas metodológicos y moleculares simples [4, 5]; mientras que otros, la critican o perfeccionan. [6, 7, 8, 9]. Algunos plantean que el caos cuántico debe emerger, naturalmente, en la mecánica de Bohm [8].

En este trabajo nos concentramos, fundamentalmente, en comprobar la validez del principio de correspondencia en esta teoría.

La teoría de De Broglie-Bohm

El propósito de la teoría de De Broglie-Bohm es ofrecer una interpretación alternativa consistente de la mecánica cuántica.

Según Bohm [1, 2, 3] esta interpretación permite concebir cada sistema individual en un estado definido, que evoluciona con el tiempo según leyes precisas (análogas a las ecuaciones clásicas del movimiento). Las probabilidades cuánticas son consideradas como una necesidad práctica y no como consecuencia de no poder conocer las coordenadas y momentos de las partículas con precisión infinita en cada instante de tiempo. El principio de incertidumbre no aparece aquí como una limitación inherente a la precisión con la cual podemos concebir correctamente la definición simultánea de momento y posición; sino más bien, como una limitación práctica a la precisión con la cual estas variables pueden ser simultáneamente medidas, debido a las perturbaciones incontrolables que introduce el aparato de medición. Las posiciones y momentos de las partículas son, por lo tanto, las variables ocultas de esta teoría.

Pretende además, realizar modificaciones en la formulación matemática, cuyos efectos sean insignificantes en el dominio atómico, (donde la presente teoría cuántica concuerda con el experimento); pero de crucial importancia en el dominio de las dimensiones del orden de 10^{-13} cm (donde la actual teoría cuántica resulta inadecuada).

Bohm basó su teoría en los postulados que enunció de la siguiente manera:

a) Un sistema mecánico cuántico, por ejemplo un electrón, consiste básicamente en una partícula con su posición bien definida, la cual varía continuamente como una función del tiempo.

E-mail: [1]bcarballo@fctn.isctn.edu.cu
[2]jrs@fctn.isctn.edu.cu

b) Esta partícula siente la influencia no solo del potencial clásico, sino también de un potencial cuántico adicional, el cual es importante al nivel atómico y despreciable a nivel macroscópico.

c) Si escribimos $\psi = \mathrm{Re}^{iS/\hbar}$, donde ψ es la función de onda y R y S son reales, entonces el potencial cuántico está dado por:

$$Q(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R(x,t)}{R(x,t)} \qquad (1)$$

La ecuación del movimiento de la partícula toma la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\{Q(x,t) + V(x,t)\} \qquad (2)$$

Para que su teoría coincida en el dominio atómico con la mecánica cuántica tradicional, Bohm adicionó los postulados siguientes:

1) El campo ψ satisface la ecuación de Schrödinger.

2) La velocidad de la partícula se restringe a:

$$v = \frac{\nabla S(x,t)}{m} \qquad (3)$$

3) No podemos predecir o controlar la localización precisa de la partícula, pero tenemos un ensemble estadístico de ellas con la densidad de probabilidad $|\psi(x)|^2$..

Cálculo de trayectorias clásicas y cuánticas

Calculamos las trayectorias clásicas y cuánticas al sistema formado por dos osciladores armónicos acoplados, procediendo del siguiente modo: para las clásicas, resolvimos las ecuaciones de Hamilton y para las cuánticas, se hallaron las coordenadas y momentos de la siguiente manera:

$$p_x(x_p, x_g, t) = -\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{\psi^*\psi}\left\{\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right\} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{p_x(x_p, x_g, t)}{m_x} \qquad (5)$$

(x puede ser x_p o x_g: las coordenadas correspondientes a los dos osciladores, ψ satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.)

Para ambos tipos de trayectorias, las condiciones iniciales para las coordenadas se generaron con la densidad de probabilidad dada por la función que se escogió como condición inicial para el problema cuántico: el producto de una gaussiana centrada en - 0.75 a.u. y la autofunción correspondiente al estado básico de uno de los osciladores. Los momentos iniciales en el caso clásico se eligieron iguales a cero por semejanza con las trayectorias cuánticas.

Sobre el principio de correspondencia en la teoría de De Broglie-Bohm

Según el postulado b de Bohm, el potencial cuántico debe hacerse despreciable a nivel macroscópico. Sin embargo, para el estado básico del oscilador armónico, cuando hacemos tender la constante de Planck a cero, esto no ocurre:

$$Q_{\eta\to 0}(x) = -\frac{kx^2}{2} \qquad (6)$$

Teniendo en cuenta el ejemplo analizado, de cumplirse el principio de correspondencia, no sería de manera fuerte [6] (para todos los sistemas físicos en todos los instantes de tiempo) o los criterios más conocidos para caracterizar el límite clásico (números cuánticos grandes, longitud de onda de De Broglie pequeña, masas grandes, etc), no nos serían de utilidad para verificarlo.

Al comparar cada trayectoria clásica con su análoga cuántica, estas no tienen por qué ser iguales entre sí (Figura 1), debido a la presencia del potencial cuántico. Como el mismo no siempre se hace despreciable a nivel macroscópico; incluso en el límite clásico, las trayectorias no tienen por qué coincidir, eligiendo las condiciones iniciales tal y como lo hicimos.

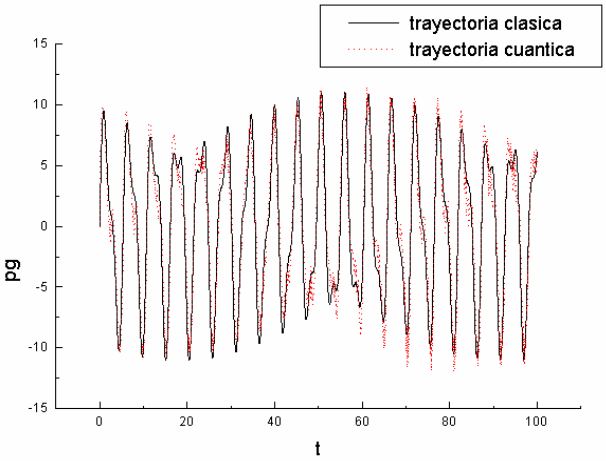

Figura 1. Representación de una trayectoria clásica y su análoga cuántica.

Sin embargo, las trayectorias promedio clásica, promedio cuántica y la generada con los valores medios de las condiciones iniciales para x_p y x_g, sí son iguales (se promediaron 100 trayectorias de cada tipo) [Figura2]. Esto se debe a que la fuerza cuántica promedio es cero y la mayor potencia que aparece en el potencial es la cuadrática. Pero debido a que el potencial cuántico promedio es mayor o igual que cero [10], a estas trayectorias promedios les corresponden, respectivamente energías diferentes:

- Energía media clásica: E_m = 6.24735931 a.u.
- Energía cuántica (valor medio del Hamiltoniano): E_c = 9.01908491 a.u.
- Energía clásica evaluada en los valores medios iniciales de x_p y x_g: $E(x_{pm}, x_{gm})$ = 5.625 a.u.

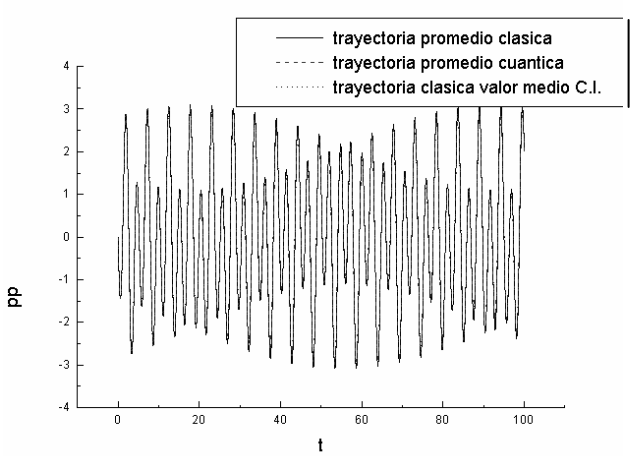

Figura 2. Trayectorias: promedio clásica, promedio cuántica y la clásica generada con los valores medios de las condiciones iniciales para x_p y x_g.

Es conocido de la mecánica cuántica tradicional que para estados excitados las probabilidades cuánticas tienden a las clásicas. Alejar del cero el centro de la gaussiana, puede ser interpretado como una manera de que esto ocurra, debido a que de esta forma contribuyen más a la función de onda inicial los estados excitados.

En la siguiente tabla se muestran los valores de las energías definidas anteriormente, para diferentes posiciones del centro de la gaussiana:

Energías	X_0 = - 0.75 a.u.	X_0 = - 0.875 a.u.	X_0 = - 1.0 a.u
E_m (a.u.)	6.24735931	8.28313521	10.6298656
$E(x_{pm}, x_{gm})$ (a.u.)	5.63252463	7.66767789	10.0148473
E_c (a.u.)	9.01908491	11.0486466	13.3891604
$E_c - E_m$ (a.u.)	2.7717256	2.76551139	2.7592948

Podemos apreciar que el valor de E_c - E_m permanece aproximadamente constante, correspondiendo al valor de $\langle Q \rangle$ en el instante inicial. Entonces, si tenemos claro a qué se debe la diferencia entre las energías, podríamos pensar que comparar las trayectorias promedio, resulta más adecuado que la comparación trayectoria a trayectoria. Sin embargo, las trayectorias promedios son iguales, estemos en el límite macroscópico o no.

P. R. Holland [4] considera que si la posición inicial de Bohm está en el centro de un paquete gausiano, la fuerza inicial cuántica es idénticamente cero y permanece cero para todo tiempo posterior. Sin embargo, en un artículo reciente [6], bajo estas mismas condiciones, se viola el principio de correspondencia.

Otro aspecto importante a señalar es el hecho de que los estados estacionarios de Bohm no tienen análogo clásico, lo que trata de salvar Holland [4] diciendo que las trayectorias de Bohm son las reales y no las que se obtienen al realizar la medición, y que, si se llevara a cabo esta, se obtendría el mismo resultado que en la mecánica cuántica tradicional, la cual está comprobado que cumple con el principio de correspondencia. El problema aquí radica en que para introducir el observador en su demostración, cambia de sistema físico, incluso a nivel macroscópico. Otras alternativas sugeridas para solucionar este problema son: no utilizar estados estacionarios como condiciones iniciales para la función de onda, sino más bien superposiciones de estos; o, de otra forma, desarrollar la formulación matemática de la teoría sobre la representación de los estados coherentes [8].

Estudio del caos a través de variables ocultas

Al calcular las funciones de correlación (autocorrelación) a 20 trayectorias cuánticas para los dos osciladores acoplados, para cada una de las variables (x_p, x_g, p_p, p_g), encontramos que estas oscilan en el tiempo, lo cual es asociado con orden en el sistema [Figura 3] [10].

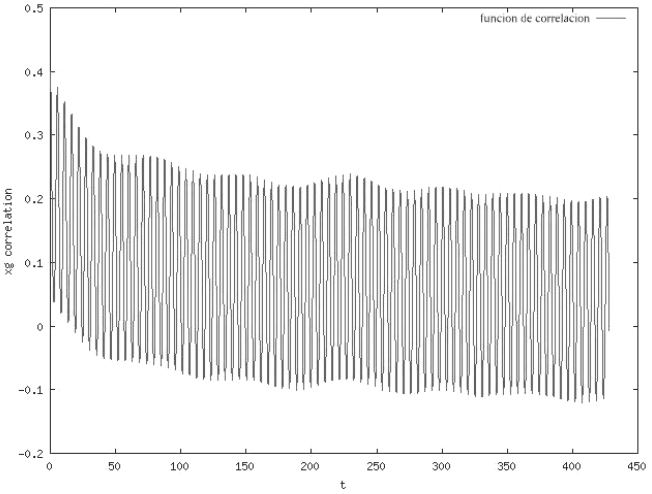

Figura 3. Función de correlación (autocorrelación) para la variable x_g de una trayectoria cuántica.

CONCLUSIONES

El postulado b de Bohm no se verifica rigurosamente de manera general, debido a que el potencial cuántico no se vuelve despreciable a nivel macroscópico para todos los sistemas físicos, en cualquier representación.

Todo parece indicar que el cumplimiento del principio de correspondencia, en su forma fuerte [6], en la teoría de De Broglie-Bohm, depende fundamentalmente de la buena elección de las condiciones iniciales (incluso de la representación utilizada [8]), lo cual no está contemplado en los postulados de la misma.

El estudio del caos a través de variables ocultas llevado a cabo hasta el momento, muestra que un sistema que no presenta caos clásico, tampoco presenta caos debido al análisis de las trayectorias de Bohm.

REFERENCIAS

[1] BOHM, DAVID (1952): **Phys. Rev**., 85(2), 166.

[2] _____ (1952): **Phys. Rev**., 85(2), 180.

[3] _____ (1953): **Phys. Rev**., 89(2), 458.

[4] HOLLAND, PETER R. (1993): **The quantum theory of motion: an account of the De Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics**, Cambridge University Press, New York.

[5] SANZ ORTIZ, ÁNGEL S. (1999): Tesina de licenciatura: Descripción mediante trayectorias de Bohm de la difracción atómica por superficies, Madrid.

[6] LEONG LAN, BOON (2000): **Phys. Rev**. A, 61, 032105-1.

[7] BRIDA, G. **et al**. (2002): arXiv:quant-ph/0206196 v1.

[8] GARCÍA DE POLAVIEJA, GONZALO (1996): **Mark S. Child, Phys. Rev**. E 55(2),1451.

[9] _____ (1996): **Phys. Rev**. A, 53(4), 2059.

[10] CABALLO PÉREZ, BRENDA (2003): Tesis de licenciatura: Sobre una posible descripción del caos cuántico en términos de variables ocultas, C. Habana.