# SIMULACIÓN DE SISTEMAS MAGNÉTICOS BIDIMENSIONALES CON INTERACCIÓN DIPOLAR

Rogelio Iliaz- Méndez<sup>1</sup>, Departamento de Física. Facultad de Eléctrica, ISPJAE Laboratorio de Superconductividad. Facultad de Física-IMRE. Cátedra de Sistemas Complejos "Henri Poincaré". Universidad de La Habana Roberto Mulet<sup>2</sup>, Laboratorio de Superconductividad. Facultad de Física-IMRE Cátedra de Sistemas Complejos "Henri Poincaré", Universidad de La Habana

#### RESUMEN

Se estudian las propiedades estáticas y dinámicas de material magnético ultrafino a través de una simulación de Monte Carlo en un módulo bidimensional de espines de Ising con interacciones de intercambio y dipolar magnético, de intensidades J y g respectivamente. Adaptando las sumas de Ewald al caso magnético en 2D reproducimos el diagrama de fases en (T,  $\delta$ ) del sistema, donde  $\delta = J/g$ , reportando la existencia de una nueva región de meta-estabilidad. Demostramos que la relajación al equilibrio es diferente si el sistema va a un estado antiferromagnético que sí relaja a un estado de franjas, y proporcionamos una posible explicación basada en la dinámica de dominios.

#### ABSTRACT

The static and dynamical properties of thin magnetic films are studied through Montecarlo simulations in a two-dimensional system of Ising spins with exchange and long-range dipolar interactions of strength J and g respectively. Addapting the Ewald Sums for the 2D magnetic case we reproduce the phase diagram of the system, reporting a new metastability region. We demonstrate that the way of relax to equilibrium depends on whether the system is going to an antiferromagnetic state or to a stripes one, giving an interpretation based in the domain dynamics.

# 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se viene prestando una especial atención al problema de los sistemas magnéticos bidimensionales. Las películas delgadas y materiales cuasi-bidimensionales son extremadamente útiles en la electrónica, en el almacenamiento de información, en la regulación de los procesos de catálisis, y en el caso de películas moleculares; también en la interpretación de procesos biotecnológicos y fármacológicos. Las nuevas técnicas de crecimiento, así como los avances recientes en epitaxia de haces moleculares y en métodos de caracterización magnetoópticos de superficie, pronostican, además, una gran variedad de aplicaciones tecnológicas futuras.

Pero no es solo la inminente influencia práctica quien mueve al estudio de este tipo de sistema; desde el punto de vista teórico ellos se convierten en una prueba importante de nuestra comprensión de las interacciones atómicas y moleculares. Más aún, en ellos tienen lugar una buena cantidad de fenómenos interesantes y extraños, muchos de los cuales recién comienzan a comprenderse y se sitúan en la frontera del conocimiento científico. Hoy es un hecho experimental comprobado que los procesos de magnetización de películas ultrafinas están regulados por la competencia entre el acoplamiento ferromagnético de corto alcance, de un lado y la interacción dipolar antiferromagnética de largo alcance, de otro. Esta competencia da lugar a lo que se conoce en Física como un *sistema frustrado*, que no es más que un sistema en el cual las entidades individuales que lo componen (espines, bosones, fermiones, monómeros), no son capaces de satisfacer todas las interacciones presentes en la búsqueda de una configuración de mínima energía.

En este momento, la simulación computacional cobra especial importancia en la investigación de las propiedades físicas que se producen debido a la frustración. Un serio esfuerzo se ha hecho últimamente por comprender tanto el equilibrio<sup>[1],(2],[3]</sup> como el no-equillibrio<sup>[4],[5],[6]</sup> en los materiales magnéticos bidimensionales.

Se conoce desde hace algún tiempo, que a medida que un sistema magnético dado se hace más bidimensional, los espines tenderán a orientarse fuera del plano. Bajo estas circunstancias podremos usar una representación uniaxial tipo Ising para

E-mail: <sup>1</sup>rogelio@fisica.uh.cu <sup>2</sup>mulet@fisica.uh.cu. describir al sistema de espines  $^{\left[7\right],\left[8\right]}$ . Tendremos entonces un sistema cuadrado L x L descrito por el Hamiltoniano

$$H = -\delta \sum_{\langle ij \rangle} \mu_i \mu_j + \sum_{\langle i\neq j \rangle} \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3}, \qquad (1)$$

donde los corchetes triangulares  $\langle ... \rangle$  indican que la primera sumatoria es solo sobre los pares de vecinos más cercanos, la segunda (i  $\neq$  j) es sobre todos los pares de espines,  $\mu_i = \pm 1$  representa al espín que se encuentra en el sitio i, mientras que  $\delta = J/g$  es un parámetro que nos habla de la relación entre la intensidad de las interacciones dipolar y de intercambio.

MacIsaac y colaboradores demostraron en 1995<sup>[2]</sup> que el estado fundamental del hamiltoniano (1) es el antiferromagnético para  $\delta < 0.85$  mientras que para  $\delta > 0.85$  este resultado se hace inestable con respecto a la formación de estructuras de franjas.

En estas estructuras, los dominios de espines se alinean a lo largo de un eje formando una franja ferromagnética de grosor h, de tal forma que los espines de franjas adyacentes son antiparalelos y forman una superred de periodo 2h (en unidades de la constante de la red) en la dirección perpendicular a las franjas.

Se ha demostrado también (y comprobado además en simulaciones de Monte Carlo para redes finitas a bajas temperaturas<sup>[2],[4]</sup>) que las fases de franjas de gran espesor se hacen más estables a medida que aumenta  $\delta$ , más estables aún que la fase ferromagnética para valores de  $\delta$  arbitrariamente largos.

Por otra parte, producto de la competencia entre las interacciones dipolar y de intercambio, parece haber consenso en cuanto a que la dinámica de este sistema está caracterizada por la formación y crecimiento de dominios magnéticos que generan, a bajas temperaturas, grandes tiempos de relajación. Estudios de Monte Carlo a bajas temperaturas<sup>[4]</sup> reportan la existencia de dos regimenes dinámicos diferentes, cuya aparición depende del valor de  $\delta$ . Así, para  $\delta > \delta_c \cong 2.7$  la magnetización relaja exponencialmente con un tiempo de relajación que depende de la temperatura T del sistema y de  $\delta$ , mientras que para  $\delta < \delta_c$  la magnetización decae como una ley de potencia con un exponente independiente de  $\delta$ .

Este fenómeno es explicado por Sampaio y colaboradores<sup>[4]</sup> a través de la formación de diferentes patrones de dominio: para  $\delta > \delta_c$  se nuclean unos pocos dominios que rápidamente crecen de tamaño como un solo conglomerado, mientras que para  $\delta > \delta_c$  sucede que son muchos los dominios que surgen en un primer momento en diferentes puntos del sistema.

Fuertes histéresis<sup>[4],[9]</sup> para  $\delta > \delta_c$  (ausentes para  $\delta < \delta_c$ ), fenómenos de envejecimiento,<sup>[9]</sup> así como algunos estudios sobre la violación del Teorema de Fluctuación-Disipación<sup>[6]</sup> son otros de los resultados recientes de la investigación en este tema.

En la sección 2 de este trabajo estudiamos el diagrama de fases, donde reportamos la existencia de una nueva zona de metaestabilidad entre fases para bajos valores de  $\delta$ . En la sección 3 estudiamos la dinámica del sistema fuera del equilibrio, ahí se comprueba la existencia de envejecimiento para enfriamientos rápidos en cualquier zona del diagrama y se encuentra que la relajación es diferente si el enfriamiento es hacia un estado fundamental antiferro que hacia una fase de franjas. En la sección 4 están resumidas las condiciones del trabajo.

## 2. SIMULACIONES DE EQUILIBRIO

La evolución del sistema se estudió utilizando el algoritmo de Metrópolis. En todos los casos presentados, se trató un sistema con condiciones de frontera periódicas, es decir, que alrededor del sistema se extienden infinitas réplicas del mismo. El potencial de interacción dipolar en esas circunstancias se halló mediante la implementación de las Sumas de Ewald. Todo este procedimiento, así como otros detalles de la simulación están explicados más exhaustivamente en la referencia [10].

Para sistemas con L = 32 llevamos a cabo simulaciones concentradas en la región de bajas temperaturas con valores entre  $\delta$  = 0 y  $\delta$  = 4; y para cada uno de los valores de  $\delta$  analizados se hizo una simulación que recogiera los parámetros fundamenta-les del sistema en función de la temperatura.

La Figura 1 muestra el comportamiento del calor específico contra la temperatura para tres valores de  $\delta$ . Estas gráficas se obtuvieron promediando, para cada valor de  $\delta$ , los resultados de 100 barridos de temperatura entre T = 3 y T = 0 usando la dinámica de Metropolis<sup>[12]</sup>. En este rango se midieron 100 valores de T y en cada uno de ellos el sistema relajó un tiempo t<sub>r</sub> = 100; todas las magnitudes temporales en este artículo se darán en pasos montecarlo por sitio<sup>[10]</sup> (mcs) y para una mejor comprensión de las unidades de las otras magnitudes fisicas (temperatura, calor especifico, susceptibilidad) puede consultarse la referencia <sup>[11]</sup>.

La figura muestra con claridad un máximo del calor especifico C como función de T para diferentes valores de  $\delta$ , lo cual sugiere la existencia de una transición de fase entre un estado desordenado y uno ordenado. El valor de la temperatura a la que ocurre la transición varía con  $\delta$ .



Figura 1. Comportamiento del calor específico contra la temperatura para diferentes valores de  $\delta$  en un sistema  $32 \times 32$ .

Las Figuras 2, 3 y 4 muestran la configuración alcanzada por el sistema para tres valores diferentes de  $\delta$  como función de la temperatura. Los cuadros oscuros representan espines hacia abajo y los claros espines hacia arriba. Para cada valor de  $\delta$  se fotografiaron tres configuraciones representativas, a saber, la de más alta temperatura, la de temperatura más baja y una de temperatura cercana a la transición de fase. Vemos que en todos los casos se llega, cuando las temperaturas son bajas, a estructuras ordenadas y, además, en los rangos de  $\delta$  predichos por la literatura científica del tema. Es decir, para  $\delta$  = 0.2 se tiene un antiferromagnético (h0), para  $\delta$  = 1.6 una fase de franjas de ancho 1 (h1) y para  $\delta$  = 3.5 franjas de ancho 2 (h2).



Figura 2. Configuraciones de equilibrio del sistema para T = 3, T = 1.8 y T = 0 con  $\delta$  = 0.2. Los cuadros claros representan espines hacia arriba y los cuadros oscuros hacia abajo.



Figura 3. Configuraciones de equilibrio del sistema para T = 3, T = 0.75 y T = 0 con  $\delta$  = 1.6. Los cuadros claros representan espines hacia arriba y los cuadros oscuros hacia abajo.



Figura 4. Configuraciones de equilibrio del sistema para T = 3, T = 1.35 y T = 0 con  $\delta$  = 3.5. Los cuadros claros representan espines hacia arriba y los cuadros oscuros hacia abajo.

No obstante, para  $\delta = 3.5$  deben hacerse algunas observaciones interesantes. Primero, ya en la Figura 1 el valor del calor específico hemos visto que aparentemente diverge para valores de temperatura muy pequeños. Pues bien, si a esto se le añade el comportamiento que observamos en la Figura 4, donde parece que el sistema ha quedado atrapado en un mínimo local, es claro que estamos en presencia de un punto importante a esclarecer. En un trabajo de Yan Mu y colaboradores<sup>[13]</sup> publicado en el 2002 se reporta a muy bajas temperaturas una nueva transición de fase, ahora hacia un estado estructuralmente diferenciado llamado "laberíntico", no tan desordenado como la fase paramagnética ni tan ordenado como la fase ordenada de franjas.

La naturaleza de este hallazgo, obtenido también mediante simulaciones de Monte Carlo, carece aún de una explicación sólida como bien expresan Mu y colaboradores citando la referencia [15] y estimulando estudios posteriores sobre el tema. Es probable que nuestros resultados estén en concordancia con el hallazgo de Mu, aunque la divergencia en aquel caso es mucho más modesta.

Para estudiar la estabilidad de las configuraciones hacemos uso de la magnetización inhomogénea (*staggered magnetization*)  $M_S$  que definida para cada configuración ( $M_{S0}$ ,  $M_{S1}$  y  $M_{S2}$ ) vale 0 si el sistema está desordenado y 1 si se encuentra en la configuración dada (h0, h1 o h2, respectivamente).

La Figura 5 se obtuvo tomando un sistema a T = 0 con una configuración determinada (h0 o h1), ahí se incrementa poco a poco la temperatura y se deja relajar una cantidad suficiente de pasos de montecarlo (100 mcs). En cada temperatura se mide  $M_S$  y su susceptibilidad inhomogénea equivalente  $\chi_S$ . Es claro que existe una temperatura en la cual la configuración impuesta deja de ser estable. Interesante es el hecho de que para un mismo valor de  $\delta$  y de T pueden ser estables varias configuraciones.



Figura 5. Comportamiento de la magnetización (cuadros negros) y la susceptibilidad inhomogéneas (cuadros blancos) correspondiente h0 y h1 para los valores  $\delta = 0.8$  y  $\delta = 2.1$  respectivamente.

En el diagrama de fases (Figura 6), la línea de cuadrados negros divide al diagrama en una región paramagnética arriba y otra ordenada abajo, mientras que las tres configuraciones ordenadas son estables abajo y no arriba de sus respectivas líneas blancas. Esto nos lleva rápidamente a la identificación de las diferentes zonas por sus patrones de orientación magnética, como está indicado en la figura.



**Figura 6**. Diagrama de fases para un sistema 32 x 32. Los cuadrados negros muestran la transición paraordenado, los cuadrados blancos la estabilidad de h0, los círculos blancos la estabilidad de h1 y los triángulos blancos la estabilidad de h2. Las líneas quebradas van sobre los intervalos de  $\delta$ donde la transición de fases no se detectó.

Lo que nos llama la atención entonces, es que aparte de las regiones paramagnética y ordenadas "puras", se ven regiones "metaestables" donde coexisten (o pueden coexistir) más de una fase de franjas. Este resultado, obtenido por Pablo Gleiser y colaboradores<sup>[14]</sup> en el año 2001, fue reportado para la región de metaestabilidad h1-h2. En nuestro trabajo, reportamos la zona metaestable h0-h1.

Para ciertos valores de la relación entre la intensidad de las interacciones

$$\delta \in (0.5; 1) \cup (2.2; 2.7)$$
 (2)

sucede que no es posible determinar si existe una transición de fase (note las líneas discontinuas en la Figura 6), es decir, la intensidad del pico, en el calor especifico y la susceptibilidad, es demasiado pobre o virtualmente no existe. Esto puede ser debido a que en estas zonas se necesita un mayor tiempo para equilibrar t<sub>r</sub> o redes de mayor tamaño. Una cosa sí es clara, estas regiones están siempre alrededor del punto en que tanto h0 y h1 en un caso, como h1 y h2 en el otro, son igualmente estables con la temperatura. Dicho de otra manera, las regiones dadas en (2) marcan los dos cambios que tiene la configuración estable que más temperatura soporta, siguiendo los valores de  $\delta$ .

## 3. ESTUDIO DE RELAJACIÓN

Las propiedades dinámicas se estudiaron haciendo enfriamientos rápidos a sistemas 16 x 16 en equilibrio a T =  $\infty$ . Esto es, a una configuración con los espines orientados aleatoriamente se la somete de forma instantánea a una evolución temporal en alguna temperatura inferior a la temperatura de transición.

Análogo al experimento de enfriamiento a campo cero (*zero field cooling*), luego de un tiempo de espera  $t_w$  (en el que el sistema va relajándose en busca del equilibrio en una zona de orden del espacio de fases) comienzan a medirse las propiedades de la relajación. La magnetización, la energía y otros parámetros de interés son así registrados junto a la función de autocorrelación espín-espín

$$C(t_{\omega},t) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i}^{N} \sigma_{i}(t_{\omega}) \sigma_{i}(t_{\omega} + t) \right\rangle.$$
(3)

donde la sumatoria va por todos los espines del sistema y los corchetes triangulares indican una promediación sobre diferentes ensembles. Esta función guarda una estrecha relación con las funciones de respuesta del sistema a través del Teorema de Fluctuación Disipación. Para sistemas "convencionales" la función  $C(t_{\omega}, t)$  no depende de  $t_{\omega}$ , o sea, es invariante ante una traslación temporal. Cuando  $t_{\omega}$  se convierte en un parámetro relevante, estaremos en presencia de un sistema vidrioso con envejecimiento.

A través de los enfriamientos descritos, el estudio se concentró en las tres zonas ordenadas, donde está bien definido el estado de equilibrio. Se tuvo además el cuidado de tomar la temperatura del enfriamiento (para el valor de  $\delta$  en cada zona) siempre en la misma proporción con relación a la temperatura crítica de la transición para-ordenado; penetrando de esta forma a la misma "profundidad" por debajo de la línea de transición. Los enfriamientos en cada zona y la relación vienen dados en el Cuadro 1.

El comportamiento de la función de autocorrelación (3) en nuestros experimentos se muestra en las Figuras 7 y 8. Es evidente que  $C(t_{\omega}, t)$  depende de  $t_{\omega}$  para todos los valores de  $\delta$  estudiados, esto es, el sistema presenta envejecimiento.



Este resultado se encontró ya en 1998<sup>[9]</sup>, también mediante simulaciones de Monte Carlo pero sin el cálculo del aporte energético que incorporan las Sumas de Ewald.

No obstante, en el trabajo citado se reportan dos regímenes de escalamiento diferentes: para  $\delta < \delta_c$  el escalamiento dinámico es del tipo

$$C(t_{\omega}, t) \alpha c_{\delta}[ln(t)/ln(t_{\omega}^{a})],$$

mientras que para  $\delta > \delta_c$ 

$$C(t_{\omega}, t) \alpha c_{\delta}[t/t_{\omega}^{a}]$$

con el valor a = 0.83 para  $\delta$  = 2 y a = 1 para  $\delta$  = 4. **Cuadro 1**. Valores de d, T y T<sub>c</sub>(d) para las tres regiones en que se hicieron los enfriamientos.

|    | δ   | Т    | Tc   | т₀∕т   |
|----|-----|------|------|--------|
| h0 | 0.2 | 0.92 | 1.79 | ≅ 1.95 |
| h1 | 1.6 | 0.4  | 1.78 | ≅ 1.95 |
| h2 | 3.5 | 0.72 | 1.4  | ≅ 1.95 |



Figura 7. De izquierda a derecha: función de autocorrelación espín-espín contra t para varios  $t_{\omega}$  y su escalamiento contra  $t/t_{\omega}$ . Enfriamiento en la zona h0.



Figura 8. De izquierda a derecha: función de autocorrelación espín-espín contra t para varios tw y su escalamiento contra t/tw. Enfriamiento en la zona h1.

En nuestro caso hay una región de t, digamos un tiempo característico, en el cual el sistema relaja de la misma forma independientemente del valor de  $\delta$ . Así se observa en el colapso de las curvas en las Figuras 7 y 8. Aquí el escalamiento siempre será

# $C(t_{\omega}, t) \alpha c_{\delta}[t / t_{\omega}],$

sin tomar en consideración, claro, la región del *plateau* (o la región final en el caso de h0).

El estudio sobre envejecimiento que citamos es anterior al reporte de la zona metaestable h1-h2, esto indica que quizás en él no se tuvo cuidado de bajar a una fase pura y entonces la no correspondencia entre aquel y nuestro trabajo puede estar explicada en la referencia [5]. Alli, estudiando la dinámica de un sistema enfriado hacia la zona metaestable h1-h2, se sugiere que la configuración metaestable se asocia, en la relajación, con dominios que bloquean el crecimiento de una de las fases. De esta forma, el lento crecimiento de dominios para tiempos intermedios sería indistinguible de una ley logarítmica y eso podría ser la causa del aparente escalamiento logarítmico observado en [9].

En la Figura 8 la función de autocorrelación permanece constante después del tiempo característico (tiempo de colapso). Sin embargo, para el enfriamiento en h0 de la Figura 7, al seguir relajando la autocorrelación, parece como si existieran dos formas distintas de comportamiento.

Para una mejor comprensión de las diferencias dinámicas entre h0 y las otras configuraciones se presenta la Figura 9,\* que muestra las características de la relajación de la energía en h0 y h1.\*\*

El comportamiento de la energía en el tiempo parece dejar claro que en h0 hay dos formas diferentes de relajación dependientes del tiempo. Durante el tiempo característico que ya mencionamos, tanto en h0 como en h1 se busca el mínimo de energía de la misma manera; a partir de entonces, h1 (Figura 9, izquierda) queda atrapado en un estado de mínimo local, esto es, congelado en una configuración de la que es muy difícil salir siguiendo una dinámica de Metropolis.

En la configuración h0 (Figura 9, derecha), sin embargo, una vez transcurrido el tiempo característico se sigue relajando, aunque de forma marcadamente diferente, hacia el estado fundamental.

La observación de Sampaio<sup>[4]</sup> comentada en la sección 1 se detectó utilizando condiciones de frontera semiabiertas. Así pudieron trabajar sistemas grandes de hasta 256 x 256 y estudiar bien las características de crecimiento de los patrones de dominio.

Nosotros creemos que esto sin dudas pasa, solo que al estar trabajando sistemas de 16 x 16 no es posible detectar semejante comportamiento. En cuanto al comportamiento de la autocorrelación y la energía para los enfriamientos en h0 y h1, sostenemos que en un primer momento del cambio brusco de temperatura se nuclean "muchos" dominios que comienzan a crecer de tamaño y rápidamente se encuentran. Hasta aquí ha transcurrido prácticamente todo el tiempo característico.

Ahora, en el caso de la zona h0, como existen dos posibles orientaciones que minimizan la energía y los dominios formados pertenecen aleatoriamente a una de estas, todos ellos comienzan a competir



**Figura. 9**. Evolución de la energía por espín durante los enfriamientos en h0 y h1. El valor resa1tado es la energía del estado básico.

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup>La energía del estado básico para el sistema en los valores dados de T y  $\delta$  se obtuvo de las simulaciones de estabilidad.

<sup>\*\*</sup>El comportamiento de la energía, así como de la autocorrelación) en la configuración h2 es análogo al de h1, por eso tomanos a este para el análisis.

entre sí, dando como resultado el crecimiento de una de las orientaciones que acercará (pero mucho más lentamente que en la primera etapa) al sistema a su estado fundamental. Así, la relajación en h0 tendrá claramente dos etapas, una relacionada con el crecimiento libre de los dos tipos de dominio antiferro-magnético (en la que la energía disminuye rápidamente), y otra asociada a la dinámica de las fronteras de dominio donde cada orientación trata de imponerse poco a poco sobre la otra. La Figura 10 muestra una de estas evoluciones en nuestro experimento.

El análisis de la zona h1 sería análogo si no fuera porque aquí no hay dos orientaciones posibles sino cuatro. Por tanto, luego de transcurrida la primera etapa de la relajación, es muy difícil para el sistema en la fase h1 invertir los espines de 3/4 de los dominios. De esta manera, el sistema se congelará en una fase que no corresponde con el estado fundamental. La Figura 11 muestra tres configuraciones del sistema para h1 en el transcurso del tiempo de un experimento.

# 4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado, mediante la implementación de un algoritmo de Monte Carlo y la deducción de las Sumas de Ewald para el potencial magnético en 2D, algunas propiedades de un modelo magnético o bidimensional de espines de lsing con interacciones competitivas de corto y largo alcance.

En las simulaciones de estática se determinó el diagrama de fases del sistema a bajas temperaturas, detectándose una fase metaestable donde coexisten patrones h0 con h1. Es probable que hayamos encontrado además las fases laberínticas predichas en la referencia [13]. En cuanto a la dinámica del sistema, no encontramos comportamientos diferentes alrededor de  $\delta_c$  como se reportó en [4], al



Figura 10. Configuraciones de un sistema tras un enfriamiento rápido zobre la zona h0 con  $t_w = 4$  en el transcurso del tiempo. De izquieda a derecha t = 1, 53, 6000. Los cuadros claros representan espines hacia arriba y los oscuros hacia abajo.



Figura 11. Configuraciones de un sistema tras un enfriamiento rápido zobre la zona h1 con  $t_w = 4$  en el transcurso del tiempo. De izquieda a derecha t = 1, 53, 6000. Los cuadros claros representan espines hacia arriba y los oscuros hacia abajo.

parecer debido al tamaño de los sistemas que utilizamos. No obstante, sí se aprecia un comportamiento diferente de la relajación entre la configuración antiferro y las de franjas de espines. Todo parece indicar que en el caso en que se relaja a franjas, el sistema queda atrapado en un equilibrio no fundamental producido por la compleja dinámica en las fronteras de dominio.

#### **5. AGRADECIMIENTOS**

Muy útiles han sido para este trabajo las discusiones sostenidas con el Lic. Danny Martínez-Pedrera, en particular aquellas sobre las Sumas de Ewald. Todas las simulaciones de estática se beneficiaron, además, con las facilidades de cálculo brindadas por el Lic. Roberto Vera de CIGB.

## REFERENCIAS

[1] KASHUBA, A. and K. L. POKROVSKY (1993): Phys. Rev. Lett. 10, 3155.

- [2] MacISAAC, A.B.; J.O. WHITEHEAD; M.C. ROBINSON and K. De' BELL (1995): Phys. Rev. B. 51, 16033.
- [3] De'BELL, K.; A.D. MacISAAC and J.P. WHITEHEAD (2000): Rev. Mod. Phys. 72, 225.
- [4] SAMPAIO, L.C.; M. P. de ALBUQUERQUE and F. S. de Menezes (1996): Phys. Rev. B. 54, 6465.
- [5] GLEISER, P.M.; F.A. TAMARIT; S.A. CANNAS and M. A. MONTEMURRO, cond-mat/0212617.

- [6] STARIOLO, D.A. and S.A. CANNAS (1999): Phys. Rev. B. 60, 3013 (1999).
- [7] ALLENSPACH, R.; M. STAMPANONI and A. BISCHOF (1990): Phys. Rev. Lett. 65, 3344.
- [8] ALLENSPACH, R. and A. BISCHOF (1992): Phys. Rev. Lett. 69, 3385.
- [9] TOLOZA, J.H.; F.A. TAMARIT and S.A. CANNAS (1998): Phys. Rev. B. 58, R8885.
- [10] DÏAZ-MÉNDEZ, R. (2003): Tesis de Diploma. Facultad de Física, Universidad de La Habana.
- [11] NEWMAN, M.E. and G.T. BARKEMA (1999): Monte Carlo Methods in Statistical Physics. Clarendon Press, Oxford.
- [12] METROPOLIS, N. et al. (1953): J. Chem. Phys. 21, 1087-92.
- [13] MU, Y. and Y. MA (2002): J. Chem. Phys. 117, 1686.
- [14] GLEISER, P.M.; F.A. TAMARIT and S.A. CANNAS cond-mat/0110182.
- [15] SANTEN, L. and W. KRAUTH (2000): Nature (London) 405, 550.